Θέμα 46

A1. Έστω ότι υπάρχει 1 x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$
τότε $f^2(x_0) - 2x_0 f(x_0) - m = 0 \Leftrightarrow m=0$ Άτοπο, αφού $m>0$
οπότε $f(x) \neq 0$ τότε $f(x)>0$ ή $f(x)<0$
Αν $f(x)>0$ τότε $f(0)>0$ και $f(1)>0$ οπότε $f(0)\cdot f(1)>0$
Αν $f(x)<0$ τότε $f(0)<0$ και $f(1)<0$ οπότε $f(0)\cdot f(1)>0$

A2. $F(x) = x^5 + f(0)\cdot f(1)\cdot x - f(0)\cdot f(1)$ (F συνεχής ως πολυωνυμική)
$F'(x) = 5x^4 + f(0)\cdot f(1) > 0 \Rightarrow F \uparrow$ (παραγ/μη -״-)
$F(\mathbb{R}) = (\lim_{x\to-\infty} F(x), \lim_{x\to+\infty} F(x)) = (-\infty, +\infty)$, αφού
$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$
Άρα $0 \in F(\mathbb{R})$ και $F \uparrow$ θα έχει μοναδική ρίζα.

B1. $f(0)=1$ και $f(x)\neq 0$ και f συνεχής τότε $f(x)>0$
$f^2(0) - 2 0\cdot f(0) - m = 0 \Leftrightarrow 1-m=0 \Leftrightarrow m=1$
$f^2(x) + 2x f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2x f(x) + x^2 = x^2+1 \Leftrightarrow (f(x)+x)^2 = x^2+1$
$\Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x\in\mathbb{R}$

B2. $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \Rightarrow f \uparrow$
$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (0, +\infty)$ αφού
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = 0$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$

Γ. Θεωρώ $h(x) = f(x) + x^3 - 1$, $x\in\mathbb{R}$, h συνεχής ως πράξεις συνεχών.
$h'(x) = f'(x) + 3x^2 > 0 \Rightarrow h \uparrow \Rightarrow h$ 1-1
$h(x)=0 \Leftrightarrow h(x) = h(0) \overset{1-1}{\Longleftrightarrow} x=0$
• $x<0 \Leftrightarrow h(x)<h(0) \Leftrightarrow h(x)<0$ και • $x>0 \Leftrightarrow h(x)>h(0) \Leftrightarrow h(x)>0$
Για να μην υπάρχει το όριο πρέπει $x=0$
$\lim_{x\to0^-} \dfrac{f(x)+1}{h(x)} = -\infty$ και $\lim_{x\to0^+} \dfrac{f(x)+1}{h(x)} = +\infty$ δεν υπάρχει το όριο

Δ. $\Gamma(x,y)$ με $x<0$ $\vec{AB} = (1,\sqrt{2})$ και $\vec{A\Gamma} = (x, y-1)$
$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ x & y-1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|y-1-\sqrt{2}x| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{x^2+1} + (1-\sqrt{2})x - 1\right|$
Θεωρώ $\phi(x) = \sqrt{x^2+1} + (1-\sqrt{2})x - 1$, $x<0$
$\phi'(x) = \dfrac{x + (1-\sqrt{2})\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ Άρα $\phi \downarrow$
$\phi((-\infty,0)) = (\lim_{x\to0^-}\phi(x), \lim_{x\to-\infty}\phi(x)) = (0,+\infty)$ άρα $\phi(x)>0$ οπότε $|\phi(x)| = \phi(x)$
$(AB\Gamma) = E \Rightarrow E = \frac{1}{2}\phi(x) \Rightarrow \frac{1}{2}\phi(x) = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \phi(x) = 2\sqrt{2}-2 \overset{\phi\downarrow}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}} x=-1$