Θέμα 45

Α1. Η f συνεχής στο $[-1,1]$ αφού f παραγωγίσιμη

$f(-1)\cdot f(1) = -f(1)\cdot f(1) = -f^2(1) \leq 0$

Αν $f(-1)\cdot f(1)<0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον 1 $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Αν $f(-1)\cdot f(1)=0 \Leftrightarrow f(-1)=0$ ή $f(1)=0$

$x=-1$ $\quad x=1$ $\quad$ οπότε έχουμε τουλάχιστον 1 ρίζα στο $[-1,1]$

Α2. Η f συνεχής στο $[-1,1]$

Η f παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$

Απο Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον 1 $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1+1}$

$\Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{2f(1)}{2} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\xi)=f(1) \\ f'(\xi)\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)\neq 1$

Α3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x-1)-f(x)}{x-1} \overset{0}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x-1)-f(x)+f(1)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x-1)-f(1)}{x-1} - \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x-1)-f(1)}{x-1} - f'(1) = 2\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{f(u)-f(1)}{u+1} - f'(1) = 2\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{f(u)+f(-1)}{u+1} - f'(1) = 0 - f'(1) = -f'(1) \neq 1$

Β1. f' άρτια άρα $f'(-x)=f'(x) \Leftrightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow (f(-x))' = (-f(x))'$

Άρα $\left.\begin{array}{l} f(-x)=-f(x)+c \\ \text{για } x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) = -f(1)+c \Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(-x)=-f(x)$

Άρα f περιττή

Για $x=0$: $f(0)=-f(0) \Leftrightarrow 2f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

Β2. $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$ $\quad$ Θεωρώ $g(x)=f(x)-x$ $\quad$ (g συνεχής ως διαφορά συνεχών)

$g'(x) = f'(x)-1 \neq 0$

Οπότε η g' διατηρεί σταθερό πρόσημο Άρα g γν. μονότονη, οπότε η $g(x)=0$ θα έχει μοναδική ρίζα.

Για $x=0$: $g(0) = f(0)-0 = f(0) = 0$

Β3. $\eta\mu\left(\frac{1}{2021}x\right) = x$

Θεωρώ $f(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{2021}x\right)$, $f'(x) = \dfrac{1}{2021}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2021}x\right)$, $f(-x) = \eta\mu\left(\frac{1}{2021}(-x)\right) = -\eta\mu\left(\frac{1}{2021}x\right) = -f(x)$ → f περιττή

$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2021}x\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2021} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2021}$ $\quad$ δηλ $f'(x)\neq 1$

Από Β2 ερώτημα $f(x)=x$ έχει μοναδική ρίζα το 0 άρα και η $\eta\mu\left(\frac{1}{2021}x\right)=x$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

Γ. $g(x)=f(x)-x$ $\quad$ και $f(x)=g(x)+x$

$g'(x) = f'(x)-1$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} x_1<x_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \\ x_1<x_2 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$

$g'(0) = f'(0)-1>0$

Άρα $g \uparrow$ $\quad$ $\Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow$

(* ομοίως στο $+\infty$)

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)+x) = \lim\limits_{x\to-\infty}g(x) + (-\infty) = -\infty$

$g\uparrow$ $\quad g(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x), \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)$ καταλαβαίνουμε

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\neq+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ ή αριθμός *