Θέμα 44

f 2 φορές παραγωγίσιμη $\Rightarrow f'$ συνεχής $\Rightarrow f$ συνεχής

Α. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2\eta\mu x-x^2-2}{e^x+\sigma\upsilon\nu x-x-2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2\sigma\upsilon\nu x-2x}{e^x-\eta\mu x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x+2\eta\mu x-2}{e^x-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x+2\sigma\upsilon\nu x}{e^x+\eta\mu x}=4$

Β1. $L=4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(x)}{e^x-x-1}=4\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x-1)=0$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0}4f(x)=0 \Leftrightarrow 4f(0)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{f(0)=0}$

Β2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(x)}{e^x-x-1}=4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^x-x-1}=1 \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{e^x-1}=1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f'(x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}=1 \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=1}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=1 \Leftrightarrow \boxed{f''(0)=1}$

$*\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1$

Γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6e^x+6\sigma\upsilon\nu x-x^3-6x-12}{2e^x+2\eta\mu x-x^2-4x-2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6e^x-6\eta\mu x-3x^2-6}{2e^x+2\sigma\upsilon\nu x-2x-4}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6e^x-6\sigma\upsilon\nu x-6x}{2e^x-2\eta\mu x-2}=$

$=\dfrac{6}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sigma\upsilon\nu x-x}{e^x-\eta\mu x-2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\eta\mu x-1}{e^x-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sigma\upsilon\nu x}{e^x+\eta\mu x}=3\cdot 2=6$

Δ. $f'(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=1$

$x<0$ τότε και $f'(x)<0$

$x>0$ τότε και $f'(x)>0$

→ δηλ. κοντά στο 0

η $\dfrac{f'(x)}{x}>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	Ο.Ε	↗

Ο.Ε στο $x=0$

το $f(0)=0$