Θέμα 43

Α. g παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων

$g'(x) = f'(x) + 1$

$g''(x) = f''(x) > 0$ Αφού f κυρτή Άρα g ∪

Β1. $(\varepsilon): y = x - 1$ πλάγια ασύμπτωτη οπότε $\lambda = 1$ και $\beta = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -1$

Αφού f δέχεται και άλλη ασύμπτωτη τότε δέχεται κατακόρυφη την $x=0$ δηλ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to0^+}(x+1) = \pm\infty + 1 = \pm\infty$ Άρα η $x=0$ $(y'y)$ κατακόρυφη της C_g

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 1 + 1 + 0 = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + x + 1 - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) + 1 = -1 + 1 = 0$

Άρα $(\delta): y = 2x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

Β2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x) + x - 1}{x g(x) - 2x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{g(x)}{x} + 1 - \frac{1}{x}}{g(x) - 2x - 1 + \frac{1}{x}} = \frac{2 + 1 - 0}{0 - 1 + 0} = -3$

Γ. C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη τότε $f'(1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} d(M, \varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \varepsilon: y = x - 1 \Leftrightarrow -x + y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|-1 + f(1) + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|f(1)|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |f(1)| = 1 \Leftrightarrow f(1) = \pm 1$

f κυρτή $\Rightarrow f'$ ↗ Άρα $x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

$x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
f'			$-$	0	$+$	
f			↘	Ο.Ε.	↗	

Οπότε f παρουσιάζει στο 1 ελάχιστο το $f(1)$

f' ↗ στο $D = (0, +\infty)$ $\quad f'(D) = \left(\lim\limits_{x\to0^+} f'(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right) = \left(\lim\limits_{x\to0^+} f'(x), 1\right)$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$ δηλ $f'(x) < 1 \Leftrightarrow f'(x) - 1 < 0$

Θεωρώ $\phi(x) = f(x) - x$, $x \in D$

$\phi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ οπότε ϕ ↘

$\phi(D) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x), \lim\limits_{x\to0^+} \phi(x)\right) = \left(-1, \lim\limits_{x\to0^+} \phi(x)\right)$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -1$

οπότε $\phi(x) > -1 \Leftrightarrow f(x) - x > -1 \Leftrightarrow f(x) > x - 1$ για $x = 1$ έχουμε $f(1) > 0$

οπότε $f(1) = 1$

Δ. $g(x) = f(x) + x + 1$

$g(1) = f(1) + 2$

$g(2) = f(2) + 3$

$g(1) - g(2) = f(1) - f(2) - 1 =$

$= \cancel{1} - f(2) - \cancel{1} = -f(2) < 0$

$h(x) = (g(1) - g(2))x^5 - x - 1$

$h'(x) = 5(-f(2))x^4 - 1 = -5f(2)x^4 - 1 = -(5f(2)x^4 + 1) < 0$

Άρα h ↘

$h(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$

Το $0 \in h(\mathbb{R})$ και h ↘ οπότε έχει μοναδική ρίζα