

Θέμα 41

A. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}, x \neq 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{1} = 3$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{1} = 3$

Δεν δέχεται κατακόρυφη αβύμητωση

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$

Δεν δέχεται οριζόντιες

$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x-2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-2-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

Άρα $y = x + 2$ πλάγια στο $+\infty$, ομοίως στο $-\infty$

B. $0 < m < 1, f(x) = \frac{mx^2+x-2}{x-1}, x \neq 1$

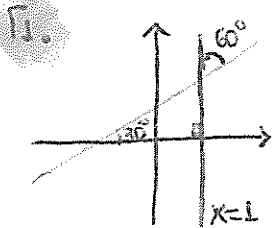
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{mx^2+x-2}{x-1} = (m-1) \cdot (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{mx^2+x-2}{x-1} = (m-1) \cdot (+\infty) = -\infty$

Άρα $x=1$ κατακόρυφη αβύμητωση

$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^2}{x^2} = m$, $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m+1)x-2}{x-1} = m+1$

Άρα $y = mx + m + 1$ πλάγια αβύμητωση στο $-\infty$ Ομοίως στο $+\infty$



$\lambda_{\theta} = \epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(x) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+x-2}{x-1} = \frac{\sqrt{3}x^2+3x-6}{3x-3}$

Γ2. $f'(x) = \frac{3\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{3}x + 9}{(3x-3)^2}$

$\Delta = 36 \cdot 3 - 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 9 = 108 - 108\sqrt{3} < 0$

$\alpha = 3\sqrt{3} > 0$

Άρα $f'(x) > 0$ οπότε f γυρνάει αβύθους. $x \neq 1$

Γ3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 + 3x - 6 = 0$, $\Delta = 9 + 24\sqrt{3}$, $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 24\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$

Επλ $f(x_1) = f(x_2) = 0$
όμως $x_1 \neq x_2$ } Άρα f έχει 1-1

Γ4. $f(n\pi x) = 2 \Leftrightarrow f(n\pi x) = f(0) \stackrel{n\pi x < 1}{\Leftrightarrow} n\pi x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$