Θέμα 39

Α1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + m$

Αφού f γνησίως μονότονη : $\Delta \le 0$ και $\alpha = 3 > 0$ Άρα $f'(x) \geq 0$
οπότε f γνησίως αύξουσα

Α2. $\left.\begin{array}{l} \Delta = 36 - 12m \\ \Delta \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 36 - 12m \le 0 \Leftrightarrow -12m \le -36 \Leftrightarrow m \geq 3$

Α3. $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$

$0 \in f(\mathbb{R})$ και $f \uparrow$ υπάρχει μοναδικό r τέτοιο ώστε $f(r) = 0$

Αν $r > 2 \Leftrightarrow f(r) > f(2) \Leftrightarrow 0 > -6 + 2m \Leftrightarrow -2m > -6 \Leftrightarrow m < 3$
Άτοπο

Άρα $r \le 2$

Α4. $F(x) \geq c \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 2mx^2 - 8x - 1 - c \geq 0$

Θεωρώ $g(x) = x^4 - 4x^3 + 2mx^2 - 8x - 1 - c$, $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4mx - 8 = 4(x^3 - 3x^2 + mx - 2) \Rightarrow g'(x) = 4 \cdot f(x)$

$g''(x) = 4f'(x) \geq 0$ Άρα $g' \uparrow$

Η f έχει μοναδική ρίζα την r

$x \le r \Leftrightarrow g'(x) \le g'(r) \Leftrightarrow g'(x) \le 0$ Άρα $g \searrow$ οπότε έχει
μοναδική ρίζα.

Β1. $r \geq 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(r) > f(1) \Leftrightarrow 0 > 1 - 3 + m - 2 \Leftrightarrow m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$ Άρα $m = 3$
οπότε $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

Β2. $F(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3x - 4$

$F(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3x - 3 - 1$

$F(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 2 + 2 - 1$

$F(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 2 + 1 \Rightarrow F(x) = f(x-1) + 1$

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1 - 1) < f(x_2 - 1) \Leftrightarrow f(x_1 - 1) + 1 < f(x_2 - 1) + 1$

$\Leftrightarrow F(x_1) < F(x_2)$ Άρα $F \uparrow$