Θέμα 38

Α1. $f'(x) = -\frac{1}{ημ^2x}\cdot συνx - \frac{1}{συν^2x}(-ημx) = \frac{ημ^3x - συν^3x}{ημ^2x\cdot συν^2x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow ημ^3x = συν^3x \Leftrightarrow ημx = συνx \Leftrightarrow εφx = 1 \Leftrightarrow x=\frac{π}{4}$

x	$-\infty$	0		$\pi/4$		$\pi/2$	$+\infty$
f'			$-$	0	$+$		
f			$\searrow$		$\nearrow$		

$x\in(0,\frac{π}{4}]$ η f' διατηρεί πρόσημο $f'(\frac{π}{6})<0$

$x\in(\frac{π}{4},\frac{π}{2})$ η f' -||- -||- $f'(\frac{π}{3})>0$

Άρα f παρουσιάζει ο.ε. στο $x=\frac{π}{4}$ το $f(\frac{π}{4}) = \frac{1}{\frac{\sqrt2}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt2}{2}} = \frac{4\sqrt2}{\sqrt2^2} = 2\sqrt2$

Α2. $Δ_1 = (0,\frac{π}{4}]$, $f \searrow$ $\Rightarrow f(Δ_1) = [f(\frac{π}{4}), \lim_{x\to0^+} f(x)) = [2\sqrt2, +\infty)$ αφού $\lim_{x\to0^+} f(x) = (+\infty)+1 = +\infty$

$Δ_2 = (\frac{π}{4},\frac{π}{2})$, $f \nearrow$ $\Rightarrow f(Δ_2) = (f(\frac{π}{4}), \lim_{x\to\frac{π}{2}^-} f(x)) = (2\sqrt2, +\infty)$ αφού $\lim_{x\to\frac{π}{2}} f(x) = 1+(+\infty) = +\infty$

Άρα $f(Δ) = [2\sqrt2, +\infty)$ Δεν παρουσιάζει μέγιστο

Β. $f(x) = 3\sqrt2$ Το $3\sqrt2 \in f(Δ_1)$ και $f\searrow$ άρα υπάρχει μοναδικό $ρ_1 \in (0,\frac{π}{4})$ τέτοιο ώστε $f(ρ_1)=3\sqrt2$

Το $3\sqrt2 \in f(Δ_2)$ και $f\nearrow$ άρα υπάρχει μοναδικό $ρ_2 \in (\frac{π}{4},\frac{π}{2})$ τέτοιο ώστε $f(ρ_2)=3\sqrt2$

Γ. $f''(x) = \left(\frac{ημx}{συν^2x} - \frac{συνx}{ημ^2x}\right)' = \frac{συνx\cdot συν^2x + ημx\cdot 2συνx\cdot ημx}{συν^4x} - \frac{-ημx\cdot ημ^2x - συνx\cdot 2ημx\cdot συ}{ημ^4x}$

$= \frac{συν^3x + 2ημ^2x\cdot συνx}{συν^4x} + \frac{ημ^3x + 2ημx\cdot συν^2x}{ημ^4x} > 0$ Άρα f ∪

Δ. Θ.Μ.Τ στο $[\frac{π}{4}, ρ_2]$ f συνεχής στο $[\frac{π}{4}, ρ_2]$

f παραγωγίσιμη στο $(\frac{π}{4}, ρ_2)$

Τότε υπάρχει $ξ \in (\frac{π}{4}, ρ_2)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ) = \frac{f(ρ_2) - f(\frac{π}{4})}{ρ_2 - \frac{π}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(ξ) = \frac{3\sqrt2 - 2\sqrt2}{ρ_2 - \frac{π}{4}} = \frac{\sqrt2}{ρ_2 - \frac{π}{4}}$

f ∪ $\Rightarrow f' \nearrow$ $\quad \frac{π}{4} < ξ < ρ_2 \Leftrightarrow f'(\frac{π}{4}) < f'(ξ) < f'(ρ_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{\sqrt2}{ρ_2 - \frac{π}{4}} < f'(ρ_2)$