Θέμα 35

Α. f 1-1 άρα $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$f(0) = f(1) \Leftrightarrow 1 = e - m \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} m = e-1 \\ m \in N \end{matrix}\right\}$ Άτοπο Άρα $m=0$

Άρα $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Β1. $f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0$, $x > 0$

οπότε f γνησίως αύξουσα, άρα $f(0)=1$ ακρότατο στο $x=0$

Β2. $f''(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \cdot \cancel{2}\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \cdot \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{4 \cdot x} = \dfrac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f''	//////	$-$	0	$+$
f	//////	$\frown$	Σκ.	$\smile$

Σημείο καμπής $(1, e)$

Γ1. Θ.Μ.Τ $[x^2, x^2+1]$

- f συνεχής στο $[x^2, x^2+1]$
- f παραγ/μη στο (x^2, x^2+1)

τότε υπάρχει $\xi \in (x^2, x^2+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x^2+1) - f(x^2)}{x^2+1-x^2} = f(x^2+1) - f(x^2)$

Για $x > 1$ $f''(x) > 0$ άρα $f' \uparrow$

$x^2 < \xi < x^2+1 \Leftrightarrow f'(x^2) < f'(\xi) < f'(x^2+1) \Leftrightarrow f'(x^2) < f(x^2+1) - f(x^2) < f'(x^2+1)$

άρα $f'(x^2) < f(x^2+1) - f(x^2)$

Γ2. $L = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{\sqrt{x^2+1}} - e^{\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x^2+1) - f(x^2)\right)$

$\left.\begin{matrix} \lim_{x \to +\infty} f'(x^2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{DLH}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \\ \text{Αφού } f(x^2+1) - f(x^2) > f'(x^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow L = +\infty$

Δ. $2f'(\eta\mu x) = e \Leftrightarrow f'(\eta\mu x) = \frac{e}{2} \Leftrightarrow f'(\eta\mu x) = f'(1) \overset{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$0 < \eta\mu x \leq 1$

Ε. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

$\left.\begin{matrix} -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{e^{\sqrt{x}}} \leq \frac{\eta\mu x}{e^{\sqrt{x}}} \leq \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} \\ \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\right) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\right) = 0 \end{matrix}\right\} \overset{\text{Κ.Π.}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{e^{\sqrt{x}}} = 0$