Θέμα 33

Α1. $f(x)=y \Leftrightarrow e^x = x+m \Leftrightarrow e^x - x - m = 0$

Θεωρώ $k(x) = e^x - x - m$

$k'(x) = e^x - 1$

$k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
k'		$-$	0	$+$	
k		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Η k παρουσιάζει Ο.Ε. στο $x=0$ οπότε $k(x) \geq k(0)$ Άρα $1-m=0 \Leftrightarrow m=1$

Α2. $g(x)=y \Leftrightarrow -x^2+cx = x+1 \Leftrightarrow -x^2+(c-1)x-1=0$

$\Delta = (c-1)^2-4$

Πρέπει $(c-1)^2-4=0 \Leftrightarrow (c-1)^2=4 \Leftrightarrow c-1=2$ ή $c-1=-2$

$c>0$ $\quad$ $c=3$ Δεκτή $\quad$ $c=-1$ Απορ

Α3. $f(x)=y \Leftrightarrow e^x-x-1=0 \Leftrightarrow k(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ Άρα $N_1(0,1)$

Α4. $g(x)=y \Leftrightarrow -x^2+3x=x+1 \Leftrightarrow -x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow -(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ Άρα $N_2(1,2)$

Β1. $f''(x)=e^x>0 \Rightarrow f$ ∪ Άρα $f(x) \geq x+1$ το ίσον ισχύει για $x=0$

$g''(x)=-2<0 \Rightarrow g$ ∩ Άρα $g(x) \leq x+1$ το ίσον ισχύει για $x=1$

Από μεταβατική ιδιότητα $f(x)>g(x)$

Β2. $h'(x)=6e^x+6x^2-18x = 6(e^x+x^2-3x) = 6(f(x)-g(x))>0$ Άρα $h \uparrow$

Β3. $6e^m+2m^3-9m^2=6e-7 \Leftrightarrow h(m)=h(1) \underset{1-1}{\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}} m=1$

Γ. $N_1N_2 = \sqrt{(x_0-x_0)^2+(g(x_0)-f(x_0))^2} = \sqrt{(g(x_0)-f(x_0))^2} = |g(x_0)-f(x_0)| = f(x_0)-g(x_0)$

Θεωρώ $d(x)=f(x)-g(x)$, $d'(x)=f'(x)-g'(x) = e^x+2x-3$

$d''(x)=e^x+2>0 \Rightarrow d' \uparrow$

Θ. Bolzano : d' συνεχής στο $[0,1]$ και $d'(0)\cdot d'(1) = -2\cdot(e-1)<0$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον 1 $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $d'(x_0)=0$, όμως $d' \uparrow$ άρα το x_0 είναι μοναδικό.

$x<x_0 \Leftrightarrow d'(x)<d'(x_0) \Leftrightarrow d'(x)<0$

$x>x_0 \Leftrightarrow d'(x)>d'(x_0) \Leftrightarrow d'(x)>0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
d'		$-$	0	$+$	
d		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Δ. $L=\lim_{x\to 0} \dfrac{6e^x+2x^3-9x^2-6x-6}{2e^x-x^2-2x-2} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\dfrac{6e^x+6x^2-18x-6}{2e^x-2x-2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{3e^x+3x^2-9x-3}{e^x-x-1}$

$\overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\dfrac{3e^x+6x-9}{e^x-1} = 3\cdot\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x+2x-3}{e^x-1} = \dfrac{-6}{0}$ $\begin{matrix} \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \end{matrix}$ Δεν υπάρχει