Θέμα 31

Α. $\theta'(t)=\frac{\pi}{4}$

$(OM_1 M M_2) = OM_1 \cdot OM_2 = x \cdot y$ Το τεταρτοκύκλιο είναι κομμάτι του

$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x^2}$ κύκλου $x^2+y^2=1$ κέντρο $(0,0)$ και $\rho=1$

Άρα $E(x) = x\cdot\sqrt{1-x^2}$ με $0 \le x \le 1$

Β. $\theta'(t)=\frac{-\pi}{4}$

$\theta(t) = -\frac{\pi}{4}\cdot t + c$ για $t=0$ έχουμε $\theta(0)=\frac{\pi}{2}$ (στη θέση OB)

Άρα $\frac{\pi}{2}=c$ οπότε $\theta(t)=-\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}$ με $[0,2]$

Γ1. $\sigma\upsilon\nu\theta(t) = \frac{x(t)}{OM} \Rightarrow x(t) = OM\cdot\sigma\upsilon\nu\theta(t) \xrightarrow{OM=\rho=1} x(t)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)$

Γ2. $\eta\mu\theta(t) = \frac{y(t)}{OM} \Rightarrow y(t) = OM\cdot\eta\mu\theta(t) \xrightarrow{OM=\rho=1} y(t)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)$

Δ1. $x'(t) = -\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x'(1) = -\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x'(1)=\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{8}$ m/sec

$y'(t) = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$y'(1) = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$y'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow y'(1)=-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$ m/sec

Δ2. $E(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$E'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
E'	$+$	0	$+$	0	$-$	
E	↗		↗		↘	

Για $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ η E παίρνει τη μέγιστη τιμή της, τότε

$x(t)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\theta(t))=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$1^{ο}$ τεταρ. $\Leftrightarrow \theta(t)=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}t=-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow t=1$