Θέμα 3ο

Α1. $f(x)=e^{2x}+e^{x}-2$

$f'(x)=2\cdot e^{2x}+e^{x}>0 \Rightarrow f \uparrow$

Α2. Αφού $f \uparrow$ και $D_f=\mathbb{R}$ δεν έχει ακρότατα

Α3. $f''(x)=4e^{2x}+e^{x}>0 \Rightarrow f \smile$

Α4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}+e^{x}-2\right)=0+0-2=-2$ $\quad y=-2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}+e^{x}-2\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+e^{x}-2}{x}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{2x}+e^{x}}{1}=+\infty$ $\quad$ Δεν έχει πλάγιες

Β1. $\varepsilon:\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=3x$

$f(0)=e^{0}+e^{0}-2=0$

$f'(0)=2e^{0}+e^{0}=3$

Β2. $e^{2x}+e^{x}=3x+2 \Leftrightarrow e^{2x}+e^{x}-2=3x \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=y \\ f \smile \end{array}\right\} \Rightarrow x=0$

Γ1. $D_{f\circ g}=\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases}=\begin{cases} x\in(-2,+\infty) \\ \ln\left(\sqrt{4x+9}-1\right)-\ln 2\in\mathbb{R} \end{cases}=D$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\ln\left(\sqrt{4x+9}-1\right)-\ln 2\right)=f\left(\ln\left(\dfrac{\sqrt{4x+9}-1}{2}\right)\right)=e^{\ln\left(\frac{\sqrt{4x+9}-1}{2}\right)^2}+e^{\ln\left(\frac{\sqrt{4x+9}-1}{2}\right)}-2$

$=\dfrac{\left(\sqrt{4x+9}-1\right)^2}{4}+\dfrac{\sqrt{4x+9}-1}{2}-2=\dfrac{4x+\cancel{9}-\cancel{2\sqrt{4x+9}}+\cancel{1}+\cancel{2\sqrt{4x+9}}-\cancel{2}-\cancel{8}}{4}=\dfrac{4x}{4}=x$

Γ2. $f(x)=y \Leftrightarrow e^{2x}+e^{x}-2=y \Leftrightarrow e^{2x}+e^{x}-2-y=0$ $\qquad \Delta_{e^x}=1+4(2+y)=4y+9$

$e^{x}=\dfrac{-1\pm\sqrt{4y+9}}{2}\ \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}\ e^{x}=\dfrac{-1+\sqrt{4y+9}}{2} \Leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{\sqrt{4y+9}-1}{2}\right)$

Άρα $f^{-1}(x)=g(x)$ με $x\in D$

Γ3.