Θέμα 28

Α1. Για $-1 \le x < 2$ $\quad \left.\begin{array}{l} f(x) = ax^2 \\ (1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1$

Για $2 \le x \le 7$ $\quad \left.\begin{array}{l} f(x) = ax + b \\ (2,4) \\ (6,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Big| \cdot(-1) \Rightarrow \begin{cases} 2a + \cancel{b} = 4 \\ -6a - \cancel{b} = 0 \end{cases} (+)$

$-4a = 4 \Leftrightarrow a = -1$

και $b = +6$

Άρα $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 2 \\ -x + 6, & 2 \le x \le 7 \end{cases}$

Α2. Για $-1 \le x < 2$: $f'(x) = 2x$

Για $2 < x \le 7$: $f'(x) = -1$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} 2x, & -1 \le x < 2 \\ -1, & 2 < x \le 7 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x + 6 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = -1$$

Β1. Θ. Bolzano $[1, 7]$ $\quad$ • f συνεχής στο $[1, 7]$ $\quad$ ισχύει

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 4$ $\quad$ • $f(1) \cdot f(7) = 1 \cdot (-1) < 0$

Β2. Θ. Bolzano $[0, 7]$ $\quad$ • f συνεχής στο $[0, 7]$ $\quad$ Δεν ισχύει

• $f(0) \cdot f(7) = 0$

Β3. Θ.Ε.Τ $[-1, 1]$ $\quad$ • f συνεχής $[-1, 1]$ $\quad$ Δεν ισχύει

• $f(-1) = f(1)$

Β4. Θ.Ε.Τ $[0, 7]$ $\quad$ • f συνεχής στο $[0, 7]$ $\quad$ ισχύει

• $f(0) = 0 \ne -1 = f(7)$

Β5. Θ. Rolle $[-1, 1]$ $\quad$ • f συνεχής $[-1, 1]$ $\quad$ ισχύει

• f παράγ. $(-1, 1)$

• $f(-1) = f(1)$

Β6. Θ. Rolle $[0, 6]$ $\quad$ Δεν ισχύει αφού f όχι παράγ. στο 2

Β7. Θ.Μ.Τ. $[0, 2]$ $\quad$ • f συνεχής $[0, 2]$ $\quad$ ισχύει.

• f παράγ. $(0, 2)$

Γ1. $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$

Γ2. $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = -1$

Γ3. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

$(f(x) > 0)$