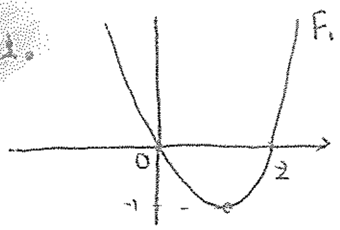
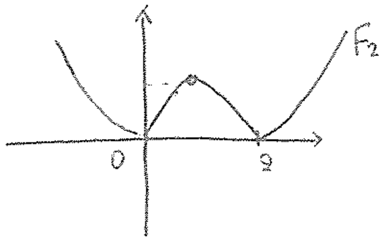
Θέμα 27

Α. Πρέπει $f(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<2$ (από C_f)

Β1.



Β2.



Γ1. $f(x)=x \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

Γ2. $f^2(x) \le f(x) \Leftrightarrow f(x)(f(x)-1) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$

x	$-\infty$	0	1
$f^2(x)-f(x)$	+	0 −	0 +

Γ3. $f(x)=x^2-2x+2 \Leftrightarrow f(x)=(x-1)^2+1$

$f(x) \le 1$ και $(x-1)^2+1 \ge 1$ $\Rightarrow$ $f(x)=1$ και $x^2-2x+2=1$

$x=1$ $\quad$ $x=1$

Άρα $x=1$

Δ1. $2f^2(x)=f(x) \Leftrightarrow 2f^2(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)(2f(x)-1)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ ή $f(x)=\frac{1}{2}$

$x=0$ ή $x=1$ $\quad$ $x=\rho_1$ ή $x=\rho_2$

Δ2. $f'(x)=1$

Θ ΜΤ στο $[0,1]$: υπάρχει $\rho \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(\rho)=1$

Επειδή f κυρτή στο $[0,1]$ έχουμε $f' \uparrow$ άρα το $\rho \in (0,1)$ μοναδική λύση

Αν $x<\rho \Leftrightarrow f'(x)<f'(\rho)=1$ και $x>\rho \Leftrightarrow f'(x)>f'(\rho)=1$

Άρα το ρ μοναδικό

Ε1. $G(x)=f(x)-(x-1)^2$

$f(x) \le 1$

$(x-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \le 0$ $\Rightarrow G(x) \le 0 \Leftrightarrow G(x) \le G(1)$ Άρα G έχει μέγιστο στο 1

Ε2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{G(x)-1} = \lim\limits_{x\to 1} \sigma\upsilon\nu 2x \cdot \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{G(x)-1} = \underset{(-)}{\sigma\upsilon\nu 2} \cdot (-\infty) = +\infty$