Θέμα 26

Α1. $-2x < f(x) < x^2+1$

$\lim\limits_{x\to -1^+}(-2x) = 2$

$\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+1) = 2$

Από κρ παρεμβολής $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$

Α2. $-2x < f(x) < x^2+1$

$\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+1) = +\infty$

Από κρ. παρεμβολής $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

Α3. $-2x < f(x) < x^2+1 \Leftrightarrow -2x-2 < f(x)-2 < x^2-1 \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} -\frac{2(x+1)}{x+1} < \frac{f(x)-2}{x+1} < \frac{x^2-1}{x+1}$

$\Leftrightarrow -2 < \frac{f(x)-2}{x+1} < x-1$

$\lim\limits_{x\to -1}(-2) = -2$, $\lim\limits_{x\to -1}(x-1) = -2$

Από κρ. παρεμβολής $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-2}{x+1} = -2$

Α4. $f(x) < x^2+1 \Leftrightarrow f(x)-x^2-1 < 0$

$-1 \le \eta\mu\left(\frac{1}{x+1}\right) \le 1 \Leftrightarrow -\eta\mu\left(\frac{1}{x+1}\right) < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)-x^2-1} - \eta\mu\left(\frac{1}{x+1}\right) < \frac{1}{f(x)-x^2-1} - 1$

$\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{f(x)-x^2-1} - \eta\mu\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) < \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{f(x)-x^2-1} - 1\right) = -\infty$ Άρα $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{f(x)-x^2-1} - \eta\mu\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = -$

Β. Θεωρώ $k(x) = \frac{g(x)+1}{x+1}$ με $\lim\limits_{x\to -1} k(x) = 1$

$\Rightarrow g(x) = (x+1)\cdot k(x) - 1$ τότε $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = \lim\limits_{x\to -1}(x+1)k(x) - 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} g(x) = -1$

Γ1. $h(x) \geq x^2$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$

Γ2. $\lim\limits_{x\to -1} h^2(x) = 1$ Άρα $\lim\limits_{x\to -1} h(x) = -1$ ή $\lim\limits_{x\to -1} h(x) = 1$

όμως $h(x) \geq x^2 \geq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} h(x) = 1$

Δ. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)\cdot g(x) + (x+1)h(x) + 2}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)\cdot g(x)+2}{x+1} + \lim\limits_{x\to -1} h(x) = \lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)\cdot g(x) - 2g(x) + 2g(x) + 2}{x+1} +$

$= \lim\limits_{x\to -1}\frac{(f(x)-2)g(x) + 2(g(x)+1)}{x+1} + 1 = \lim\limits_{x\to -1} g(x)\cdot\frac{f(x)-2}{x+1} + 2\cdot\lim\limits_{x\to -1}\frac{g(x)+1}{x+1} + 1 = (-1)(-2) + 2\cdot 1 + 1$

$= 5$

Ε. $h(x) \geq x^2 \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h(0)$ Άρα h παρουσιάζει ελάχιστο

οπότε από Θ. Fermat $h'(0) = 0$