Θέμα 24

Α. f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$x\cdot f(x) = e^x + x - 1 \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} f(x) = \dfrac{e^x+x-1}{x}$

Άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+x-1}{x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+1}{1} = 2$

Β1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x+x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(e^x+1)\cdot x - (e^x+x-1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{e^x\cdot x + \cancel{x} - e^x - \cancel{x} + 1}{x^2}$

$= \dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$

και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{2x} \underset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$

Θεωρώ $g(x) = e^x(x-1)+1$, $g'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = e^x x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$

Η g παρουσιάζει ΟΕ στο $x=0$ το $g(0)=0$

Άρα $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$

οπότε $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2} > 0 \quad (x\neq 0)$

Άρα $f \nearrow$

Β2. $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (1, +\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x+x-1}{x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x+1}{1} = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+x-1}{x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+1}{1} = +\infty$

Β3. $3\sqrt[3]{e} - 2\sqrt{e} < 1 \Leftrightarrow 3e^{1/3} - 2e^{1/2} < 1$

Το $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} \overset{f\nearrow}{\Longrightarrow} f\left(\dfrac{1}{3}\right) < f\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{e^{1/3}+\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}} < \dfrac{e^{1/2}+\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3e^{1/3}+\cancel{1}-3 < 2e^{1/2}+\cancel{1}-2$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{e} - 2\sqrt{e} < 1$

Γ1. $f''(x) = \dfrac{(e^x(x-1)+e^x)\cancel{x^2} - (e^x(x-1)+1)2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{e^x\cdot x^2 - 2e^x\cdot x + 2e^x - 2}{x^3} = \dfrac{e^x(x^2-2x+2)-2}{x^3}$

Θεωρώ $h(x) = e^x(x^2-2x+2)-2$, $h'(x) = e^x(x^2-2x+2) + e^x(2x-2) = e^x\cdot x^2 > 0 \Rightarrow h\nearrow$

$x<0 \Leftrightarrow h(x) < h(0) \Leftrightarrow h(x) < 0$, $\quad x>0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$

$f''(x) = \dfrac{h(x)}{x^3} > 0 \qquad f''(x) = \dfrac{h(x)}{x^3} > 0$ Άρα f κυρτή

Γ2. ε: $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 2$

$f \cup$ άρα $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) > \dfrac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow \dfrac{e^x+x-1}{x} > \dfrac{1}{2}x + 2$

το ίσον ισχύει $x=0$

• Αν $x>0$: $e^x+x-1 > 0{,}5x^2+2x \Leftrightarrow e^x > 0{,}5x^2+x+1$ • Αν $x<0$: $e^x < 0{,}5x^2+x+1$

Γ3. Για $x = \dfrac{1}{2}$: $e^{1/2} > 0{,}5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} > \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} > \dfrac{13}{8}$

Θέμα 2Δ

Δ. $OM = \sqrt{(x-0)^2 + (g(x)-0)^2}$ $g(x) = f(x)$, $x \in [-1,1] - \{0\}$ και $g(0) = 2$

$OM = \sqrt{x^2 + g^2(x)}$

Το OM γίνεται ελάχιστο όταν γίνει ελάχιστο το $x^2 + g^2(x)$

Θεωρώ $d(x) = x^2 + g^2(x)$, $x \in [-1,1] - \{0\}$

$d'(x) = 2x + 2g(x) \cdot g'(x)$

$d''(x) = 2 + 2(g'(x))^2 + 2g(x) \cdot g''(x) > 0 \Rightarrow d' \uparrow$

Θ. Bolzano στο $(-1,1)$ · d' συνεχής στο $[-1,1]$

· $d'(-1) \cdot d'(1) = -\frac{4}{e} < 0$

οπότε υπάρχει $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $d'(x_0) = 0$

και αφού $d' \uparrow$ το x_0 είναι μοναδικό

$x < x_0 \Leftrightarrow d'(x) < d'(x_0) \Leftrightarrow d'(x) < 0$

$x > x_0 \Leftrightarrow d'(x) > d'(x_0) \Leftrightarrow d'(x) > 0$

x	$-\infty$	-1	x_0	1	$+\infty$
d'	////	$-$	0	$+$	////
d	////	$\searrow$		$\nearrow$	////
			Ο.Ε.		