Θέμα 22

Α. $g(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \dfrac{\cancel{1-x}}{\cancel{(1-x)}(1+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} = g(1)$ Άρα $g(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$, $x \in [0,+\infty)$

Β. f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 1 και στο 2

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{x+a\sigma\upsilon\nu(\pi x)}}{e} = \lim\limits_{x\to 1^+} (ax^2+x-b) \Leftrightarrow \dfrac{e^{1-a}}{e} = a-b+1$

$\Leftrightarrow \boxed{e^{-a} = a-b+1}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} (ax^2+x-b) = \lim\limits_{x\to 2^+} (\eta\mu(\pi x) - b + 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a + \cancel{2} - \cancel{b} = \cancel{\eta\mu 2\pi}^{\,0} - \cancel{b} + \cancel{2} \Leftrightarrow 4a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a=0}$

Άρα $\cancel{e^0}^{\,1} = -b+1 \Leftrightarrow \boxed{b=0}$

Γ. $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x \le 1 \\ x, & 1 < x < 2 \\ \eta\mu(\pi x)+2, & x \ge 2 \end{cases}$

→ Για $x \in [1,2]$: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow x + x\sqrt{x} = 1$

Θεωρώ $h(x) = x + x\sqrt{x} - 1$, $x \in [1,2]$

$h'(x) = 1 + \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow h \uparrow$

$h([1,2]) = [h(1), h(2)] = [1, 1+2\sqrt{2}]$ Το $0 \notin h([1,2])$ άρα C_f, C_g δεν τέμνονται

→ Για $x \in [1,+\infty)$: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \eta\mu(\pi x) + 2 = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow \eta\mu(\pi x) + 1 + 1 - \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = 0$

$\Leftrightarrow \eta\mu(\pi x) + 1 + \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 0$ όμως $\eta\mu(\pi x) + 1 \ge 0$ και $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} > 0$

Άρα $f(x) - g(x) > 0$ Άρα δεν τέμνονται

→ Για $x \in (-\infty, 1)$: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{x-1} = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow e^{x-1} - \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = 0$

Θεωρώ $k(x) = e^{x-1} - \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$, $k'(x) = e^{x-1} + \dfrac{1}{(1+\sqrt{x})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

Άρα $k \uparrow$

Η k συνεχής στο $[0,1]$

$k(0) \cdot k(1) = \left(\dfrac{1}{e} - 1\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1-e}{e} \cdot \dfrac{1}{2} < 0$ Από Θ. Bolzano υπάρχει 1 $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $k(x_0) = 0$ και επειδή $k \uparrow$ το x_0 είναι μοναδικό