Θέμα 18

A. $f(x)=y \Leftrightarrow a\sqrt{x}-b=y \Leftrightarrow a\sqrt{x}=y+b \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{y+b}{a} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{a}(y+b)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{a}(y^2+2by+b^2)$ Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x^2+\dfrac{2b}{a}x+\dfrac{b^2}{a}$

όμως $f^{-1}(x)= x^2+c$

Άρα $\dfrac{1}{a}=1 \Leftrightarrow a=1$ και $\dfrac{2b}{a}=0 \Leftrightarrow b=0$ και $\dfrac{b^2}{a}=c \Leftrightarrow c=0$

Επομένως $f(x)=\sqrt{x}$

B1. $AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(0-f(x)\right)^2}=\sqrt{x^2-9x+\frac{81}{4}+x}=\sqrt{x^2-8x+\frac{81}{4}}$

B2. $AM=d$ άρα $d(x)=\sqrt{x^2-8x+\frac{81}{4}}$

$$d'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-8x+\frac{81}{4}}}\cdot(2x-8)=\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+\frac{81}{4}}}$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
d'			$-$ 0 $+$	
d			$\searrow$ ο.ε. $\nearrow$	

Η d παρουσιάζει ο.ε στο $x=4$.

Άρα το σημείο $M(4,f(4)) \rightarrow M(4,2)$

B3. $\lambda_\varepsilon=f'(4)=\dfrac{1}{4}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\lambda_{AM_0}=\dfrac{y_{M_0}-y_A}{x_{M_0}-x_A}=\dfrac{2-0}{4-\frac{9}{2}}=\dfrac{2}{-\frac{1}{2}}=-4$ $\qquad \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{AM_0}=\dfrac{1}{4}(-4)=-1$

Άρα $\varepsilon \perp AM_0$

Γ1. $x'(t)=2t$ μμ./sec $\qquad x(t)=t^2+c \qquad x(0)=0 \Leftrightarrow c=0$ Άρα $x(t)=t^2$

Άρα για $t=2$ έχουμε $x(2)=2^2=4$

Γ2. $OM=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+f^2(x)}=\sqrt{x^2+\sqrt{x}^2}=\sqrt{x^2+x}$

$S(t)=\sqrt{x^2(t)+x(t)}=\sqrt{t^4+t^2}$

$$S'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t^4+t^2}}\cdot(4t^3+2t)=\frac{2t^3+t}{\sqrt{t^4+t^2}}$$

$$S'(2)=\frac{2\cdot 8+2}{\sqrt{16+4}}=\frac{18}{\sqrt{20}}=\frac{18}{2\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}\ \text{μμ/sec}$$