Θέμα 17

Α1. $f(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(x-\gamma) = \dfrac{a}{(x-\gamma)^2+1}$

Άρα $\dfrac{a}{(x-\gamma)^2+1} = \dfrac{1}{x^2+b} \Leftrightarrow ax^2+ab = x^2-2\gamma x+\gamma^2+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -2\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=0 \\ ab=\gamma^2+1 \Leftrightarrow b=1 \end{cases}$

Άρα $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in R$

Α2. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x^2+1)^2}\cdot(x^2+1)' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ο.Μ. $\to f(0)=1$

$f''(x) = \dfrac{(-2x)'\cdot(x^2+1)^{\cancel{2}} + 2x\cdot 2\cdot\cancel{(x^2+1)}\cdot 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}$

$= \dfrac{-2x^2-2+8x^2}{(x^2+1)^3} = \dfrac{4x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2-2=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\smile$	Σ.Κ	$\frown$	Σ.Κ	$\smile$	

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+1} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1} = 0$

$\Big\}$ $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

Άρα

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f''		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	0

και f άρτια αφού $f(-x) = \dfrac{1}{x^2+1} = f(x)$

Β1. $F = f\circ f$ $\quad D_{f\circ f} = \begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_f \end{cases} = \begin{cases} x\in R \\ \dfrac{1}{x^2+1}\in R \end{cases} = R$

$F(x) = (f\circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{1}{f^2(x)+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{(x^2+1)^2}+1} = \dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2+1}$

$F'(x) = \dfrac{2(x^2+1)\cdot 2x\cdot\left((x^2+1)^2+1\right) - (x^2+1)^2\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{\left((x^2+1)^2+1\right)^2} = \dfrac{4x(x^2+1)}{\left((x^2+1)^2+1\right)^2}$

$F'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	

Β2. Η F παρουσιάζει Ο.Ε. στο $x=0$ το $F(0)=\dfrac{1}{2}$

Γ. $f(f(x)-1)=1 \xLeftrightarrow[f(x)\le 1]{\text{f εωτικής}}$

$f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow x=0$

$f(x)+f(10^x+x-1)=2$

$\left.\begin{aligned} &f(x)\le 1 \\ &f(10^x+x-1)\le 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x)+f(10^x+x-1)\le 2$

Το ίσον ισχύει όταν $x=0$

Δ. $E(x) = 2x\cdot f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$E'(x) = \dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
E'		$-$	0	$+$	0	$-$	
E		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	

Η E παρουσιάζει Τ.Μ στο $x=1$ το $E(1)=\dfrac{2}{2}=1$