Θέμα 16

Α1. Η f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{2e^x-1-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2ax+1-1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2a\cancel{x}}{\cancel{x}} \Leftrightarrow 2\cdot\lim_{x\to0^-}e^x=2a \Leftrightarrow 2a=2\Leftrightarrow a=1$$

Α2. Για $x<0$ $f'(x)=2e^x>0 \Rightarrow f \uparrow$

Για $x>0$ $f'(x)=2>0 \Rightarrow f \uparrow$ και αφού f συνεχής έχουμε f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Β1. Αφού $f \uparrow$ τότε 1-1 άρα f αντιστρέφεται.

$$D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-1,+\infty)$$

Β2. $f(x)>x$ Για $x<0$: $2e^x-1>x \Leftrightarrow 2e^x-x-1>0$

Θεωρώ $g(x)=2e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=2e^x-1$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2}$

$x=-\ln2$

x	$-\infty$	$-\ln2$	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

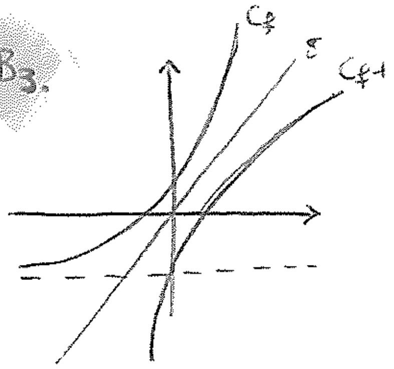
Η g παρουσιάζει Ο.Ε. στο $x=-\ln2$

το $g(-\ln2)=2e^{-\ln2}+\ln2-1=2\cdot\frac{1}{2}+\ln2-1=\ln2>0$

Άρα $g(x)\geq g(-\ln2) \Rightarrow g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-x>0 \Leftrightarrow f(x)>x$

Για $x>0$: $2x+1>x \Leftrightarrow x>-1$

Β3.



Γ. $(f\circ f)(x)=\ln(2e^3)+f^{-1}(0) \Leftrightarrow (f\circ f)(x)=\cancel{\ln2}+\ln e^3-\cancel{\ln2}$

$\Leftrightarrow (f\circ f)(x)=3 \Leftrightarrow f(f(x))=3 \Leftrightarrow f(f(x))=f(1)$

$\Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=f(0) \Leftrightarrow x=0$

Δ1. $(M'M)=\sqrt{(x-y)^2+(y-x)^2}=\sqrt{2(x-y)^2}=\sqrt2|x-y|=\sqrt2|x-f(x)|$

Αφού $f(x)>y \Leftrightarrow f(x)-x>0$ τότε $(M'M)=\sqrt2(f(x)-x)$

$$=\begin{cases}\sqrt2(2e^x-1-x), & x<0\\ \sqrt2(2x+1-x), & x\geq0\end{cases}=\begin{cases}2\sqrt2\cdot e^x-\sqrt2\cdot x-\sqrt2, & x<0\\ \sqrt2x+\sqrt2, & x\geq0\end{cases}$$

Δ2. $x<0$: $d'(x)=2\sqrt2e^x-\sqrt2=\sqrt2(2e^x-1)$

$d'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\ln2$

$x>0$: $d'(x)=\sqrt2>0 \Rightarrow d \uparrow$

x	$-\infty$	$-\ln2$		0	$+\infty$
d'	$-$	0	$+$		
d	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$		

Άρα για $x=-\ln2$ η d γίνεται ελάχιστη

οπότε $M(-\ln2,0)$ και $M'(0,-\ln2)$