Θέμα 14

Α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f'(x)+xf''(x)-\eta\mu x-2f'(0)}{x}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2(f'(x)-f'(0))}{x}+\dfrac{xf''(x)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=2$

$\Leftrightarrow 2\cdot f''(0)+f''(0)-1=2 \Leftrightarrow 3f''(0)=3 \Leftrightarrow f''(0)=1$

Β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu x-(1+f(0))x-f'(0)x^2}{x^3} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+xf'(x)+\sigma\upsilon\nu x-1-f(0)-2f'(0)x}{3x^2}$

$\overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+f'(x)+x\cdot f''(x)-\eta\mu x-2f'(0)}{6x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f'(x)+xf''(x)-\eta\mu x-2f'(0)}{6x} \overset{DLH}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f''(x)+f''(x)+xf'''(x)-\sigma\upsilon\nu x}{6} = \dfrac{3f''(0)-1}{6} = \dfrac{3-1}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+1}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}$ Συμπεραίνουμε ότι $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(x)-3}{x-1}=4$ Συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}(2f(x)-3)=0 \Rightarrow 2f(1)-3=0$

$\Leftrightarrow f(1)=\dfrac{3}{2}$

Άρα $f(1)=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+a+b=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow a+b=1$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\left(\frac{1}{2}x^2+ax+b\right)-3}{x-1}=4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2ax+2b-3}{x-1}=4 \overset{DLH}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+2a}{1}=4$

$\Leftrightarrow 2+2a=4 \Leftrightarrow 2a=2 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$ και $b=1-a \Leftrightarrow \boxed{b=0}$

Άρα $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$

Δ. Έστω $M(x,f(x))$ σημείο της παραβολής

$MA=\sqrt{(1-x)^2+(-1-f(x))^2} \Rightarrow d(x)=\sqrt{1-2x+x^2+1+2f(x)+f^2(x)} \Rightarrow$

$d(x)=\sqrt{x^2-2x+2+x^2+2x+\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)^2} \Rightarrow d(x)=\sqrt{2x^2+2+\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2}$

$d(x)=\sqrt{\frac{1}{4}x^4+x^3+3x^2+2}$

$d'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^4+x^3+3x^2+2}}\cdot(x^3+3x^2+6x)$ $\quad d'(x)=0 \Leftrightarrow x(x^2+3x+6)=0$

$x=0$ $\quad x^2+3x+6=0$

$\Delta=9-24=-15<0$

Άρα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
d'		$-$	0	$+$	
d		$\searrow$	ελ.	$\nearrow$	

Άρα $M\equiv O(0,0)$