Θέμα 13

Α1. $f(x) = x^5 + x - 18m$ Η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ Άρα $f \nearrow$

Α2. Αφού $f \nearrow$ θα έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο $(1,2)$

Η f συνεχής στο $[1,2]$

Η f παραγωγίσιμη στο $(1,2)$

$f(1)\cdot f(2) < 0 \Leftrightarrow (2-18m)(34-18m) < 0 \Leftrightarrow 68 - 36m - 612m + 324m^2 < 0$

$\Leftrightarrow 324m^2 - 648m + 68 < 0 \Leftrightarrow 81m^2 - 162m + 17 < 0$

$\Delta = 20\,736$ $m_{1,2} = \dfrac{162 \pm 144}{162} = \begin{cases} 1{,}89 \\ +0{,}11 \end{cases}$

m	$-\infty$		$+0{,}11$		$1{,}89$		$+\infty$
$81m^2-162m+17$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\left.\begin{array}{l} m \in (+0{,}11,\ 1{,}89) \\ m \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow m = 1$

Άρα $f(x) = x^5 + x - 18$

Β1. Αφού $f \nearrow$ άρα 1-1 τότε αντιστρέφεται

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

τότε $y = (f^{-1}(y))^5 + f^{-1}(y) - 18 \Leftrightarrow (f^{-1}(y))^5 + f^{-1}(y) = 18 + y$

Παραγωγίζω: $5(f^{-1}(y))^4 \cdot (f^{-1}(y))' + (f^{-1}(y))' = 1 \Leftrightarrow (f^{-1}(y))' = \dfrac{1}{5(f^{-1}(y))^4 + 1} > 0$

Άρα $f^{-1} \nearrow$

Β2. $f(x) + f^{-1}(x) \leq f(-18)$

Θεωρώ $h(x) = f(x) + f^{-1}(x)$ και $h'(x) = f'(x) + f^{-1\prime}(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow$

$h(x) \leq h(-18) \Leftrightarrow f(x) + f^{-1}(x) \leq f(-18) + 0 \Leftrightarrow f(x) + f^{-1}(x) \leq f(-18)$

Γ. $f(x) = x^5 + x - 18$

$f'(x) = 5x^4 + 1$

$f''(x) = 20x^3$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	

Σ.Κ στο $x=0$

Δ. $A(18,0)$

ε: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow 0 - f(x_0) = f'(x_0)(18 - x_0) \Leftrightarrow -(x_0^5 + x_0 - 18) = (5x_0^4 + 1)(18 - x_0)$

$\Leftrightarrow -x_0^5 - \cancel{x_0} + \cancel{18} = 90x_0^4 - 5x_0^5 + \cancel{18} - \cancel{x_0} \Leftrightarrow 4x_0^5 - 90x_0^4 = 0 \Leftrightarrow x_0^4 \cdot (4x_0 - 90) = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = 0$ ή $x_0 = \dfrac{90}{4}$

$x_0 = \dfrac{45}{2}$