Θέμα 12

Α1. $f'(x)=e^x>0 \Rightarrow f \uparrow$

Α2. $f''(x)=e^x>0 \Rightarrow f \smile$

Α3. $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (2,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+2)=0+2=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+2)=+\infty+2=+\infty$

Α4. $\left.\begin{array}{l} \varepsilon:\ y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0) \\ f(0)=3\ ,\ f'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y-3=1x \Leftrightarrow y=x+3$

Β1. $g'(x)=\dfrac{1}{x-1}\cdot(x-1)'=\dfrac{1}{x-1}>0 \Rightarrow g \uparrow$

Β2. $g''(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0 \Rightarrow g \frown$

Β3. $g(D)=\left(\lim\limits_{x\to1^+} g(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, αφού

$\lim\limits_{x\to1^+}(\ln(x-1))=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x-1))=+\infty$

Β4. $\left.\begin{array}{l} \varepsilon':\ y-g(2)=g'(2)(x-2) \\ g(2)=0 \text{ και } g'(2)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=1(x-2) \Leftrightarrow y=x-2$

Γ. $f(x)>g(x)$ (αρκεί να δείξω αυτό)

Η f κυρτή άρα $f(x)\geq y \Leftrightarrow f(x)\geq x+3$

Η g κοίλη άρα $g(x)\leq y \Leftrightarrow g(x)\leq x-2$

οπότε $y_1>y_2 \Leftrightarrow \cancel{x}+3>\cancel{x}-2 \Leftrightarrow 3>-2$ ισχύει

Αφού η εφαπτομένη της f είναι πάνω από την εφαπτομένη της g και η f είναι πάνω από την ε ενώ η g κάτω από την ε'

Έχουμε $f(x)>g(x)$