Θέμα Δ

Α. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}\in\mathbb{R}$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+1)=0$

Αφού f παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής

$\Rightarrow f(0)+1=0 \Leftrightarrow f(0)=-1$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$$

Β1. Για $x\in[-2,1]$ η f' είναι σταθερή : $f'(x)=2$

Για $x\in(1,2]$: $B(1,2)$ και $\Gamma(2,4)$ η f' είναι ευθεία

$y=\alpha x+\beta$ $\quad\begin{cases}\alpha+\beta=2 \quad |\cdot(-1)\\ 2\alpha+\beta=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha-\cancel{\beta}=-2\\ 2\alpha+\cancel{\beta}=4 \quad (+)\end{cases}$

$\alpha=2$ και $\beta=0$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}2, & -2\le x\le 1\\ 2x, & 1<x\le 2\end{cases}$

Β2. $f(x)=\begin{cases}2x+c_1, & -2\le x\le 1\\ x^2+c_2, & 1<x\le 2\end{cases}$ $\qquad f(0)=-1 \Leftrightarrow 2\cdot 0+c_1=-1 \Leftrightarrow c_1=-1$

$f(x)=\begin{cases}2x-1, & -2\le x\le 1\\ x^2+c_2, & 1<x\le 2\end{cases}$ $\qquad f$ συνεχής στο 1

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x) \Leftrightarrow 1=1+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$

$f(x)=\begin{cases}2x-1, & -2\le x\le 1\\ x^2, & 1<x\le 2\end{cases}$

Γ. $f'(x)>0$ αφού για $x\in[-2,1]$ $f'(x)=2>0$ Άρα f γνησίως αύξουσα

$x\in(1,2]$ $f'(x)=2x>0$

Άρα f 1-1 άρα f αντιστρέφεται.

$x\in[-2,1]$: $f(x)=y \Leftrightarrow 2x-1=y \Leftrightarrow 2x=y+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{2}$ Άρα $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$D_{f^{-1}}=f([-2,1])=[f(-2),f(1)]=[-5,1]$

$x\in(1,2]$: $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y \Leftrightarrow x=\sqrt{y}$ Άρα $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

$D_{f^{-1}}=f((1,2])=(f(1),f(2)]=(1,4]$ τελικά $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, & -5\le x\le \\ \sqrt{x}, & 1<x\le 4\end{cases}$

Δ1. $g(x)=2x$, $x\in[1,2]$

$g'(x)=2>0 \Rightarrow g \uparrow$ άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται

$g(x)=y \Leftrightarrow 2x=y \Leftrightarrow x=\dfrac{y}{2}$ Άρα $g^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}$ με $D_{g^{-1}}=g([1,2])=$

$=[g(1),g(2)]=[2,4]$

Δ2. $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{2}\cdot(x)'=\frac{1}{2}$ $\qquad (g^{-1})'(4)+(f^{-1})'(4)=$

$(f^{-1})'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$