Θέμα 1ο

Α. Στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ακρότατο και μάλιστα ελάχιστο.

Από Θ. Fermat $f'(1)=0$

$f'(x) = 4x^3 - 4m$

$f'(1)=0 \Leftrightarrow 4-4m=0 \Leftrightarrow m=1$ Άρα $f(x) = x^4 - 4x + 3$

Β. $e^{4x} \le 4e^x - 3 \Leftrightarrow (e^x)^4 - 4e^x + 3 \le 0 \Leftrightarrow f(e^x) \le 0 \Leftrightarrow f(e^x) \le f(1)$

$\xLeftrightarrow{e^x \in [1,+\infty)} e^x \le 1$

$\xLeftrightarrow{e^x \in (-\infty,1]} e^x \ge 1$

Άρα $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Γ. Η f συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική

Η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική

Από Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\xi^3 - 4 = -3 \Leftrightarrow 4\xi^3 = 1 \Leftrightarrow \xi^3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \xi = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ δεκτή αφού

$0 < \xi < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt[3]{\frac{1}{4}} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4} < 1$

Δ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{συν^2x - συνx}{συν^5x - 10συν^2x + 15συνx - 6}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{συνx\,\cancel{(συνx-1)}}{\cancel{(συνx-1)}(συν^4x + συν^3x + συν^2x - 9συνx + 6)}$

$= \dfrac{1}{1+1+1-9+6} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

$συν^4x + συν^3x + συν^2x - 9συνx + 6 =$

$= (συνx-1)(συν^3x + 2συν^2x + 3συνx - 6)$

$= (συνx-1)^2 \cdot (συν^2x + 3συνx + 6) > 0$

Ε. $(f\circ f)(x) + f(x) = f(f(x)) + f(x)$

Θεωρώ $g(x) = f(f(x)) + f(x)$

$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) + f'(x)$

$f'(x) = 4x^3 - 4$

$f''(x) = 4x^2 \ge 0 \Rightarrow f' \nearrow$

$x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

$x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Άρα $g(x) \ge g(1) \Leftrightarrow g(x) \ge 3 \Leftrightarrow g(x) > 0$

Άρα $(f\circ f)(x) + f(x) \ne 0$

$f(1) = 0$

$f(f(1)) = f(0) = 3$

$g(1) = f(f(1)) + f(1)$

$= 3 + 0 = 3$