Θέμα 09

Α1. f παραγωγίσιμη (ως άθροισμα) άρα και συνεχής

$f'(x) = 2e^x + 2x - 2$

$f''(x) = 2e^x + 2 > 0 \Rightarrow f$ ∪

Α2. $\varepsilon:\ y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$\left.\begin{aligned} f(1) &= 2e + 1 - 2 - 2 = 2e - 3 \\ f'(1) &= 2e + 2 - 2 = 2e \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y - (2e-3) &= 2e(x-1) \\ y &= 2ex - \cancel{2e} + \cancel{2e} - 3 \\ y &= 2ex - 3 \end{aligned}$

Α3. Η f κυρτή και η $y = 2ex - 3$ η εφαπτομένη της

Άρα $f(x) \geq y \Leftrightarrow 2e^x + x^2 - 2x - 2 \geq 2ex - 3 \Leftrightarrow 2e^x + x^2 - 2x - 2 - 2ex + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2e^x + x^2 - 2x + 1 - 2ex \geq 0 \Leftrightarrow 2e^x + x^2 - 2(e+1)x + 1 \geq 0$

Θέτω όπου x το $-x$ και έχουμε $2e^{-x} + (-x)^2 - 2(e+1)(-x) + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{e^x} + x^2 + 2(e+1)x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 + x^2 e^x + 2(e+1)xe^x + e^x \geq 0$

Α4. Έχουμε $2e^x + x^2 - 2(e+1)x + 1 \geq 0 \xrightarrow{\text{Θέτω } x \text{ το } \ln x} 2e^{\ln x} + \ln^2 x - 2(e+1)\ln x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x + \ln^2 x - (e+1)\ln x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$

Η ισότητα ισχύει όταν $x = e$: $2e + \ln^2 e - (e+1)\cdot\ln e^2 + 1 = 2e + 1 - \cancel{2e} - 2 + 1 = 0$

Όταν $x = e$: $h(x) \geq h(e)$ τότε η h έχει ελάχιστο στο $x = e$

Β1. $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \uparrow$ η f' μηδενίζεται για $x = 0$

$x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

$x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	Ο.Ε.	↗

Η παρουσιάζει στο $x=0$ Ο.Ε. το $f(0) = 0$

Β2. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 άρα $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Αν θέσω όπου x το $\ln x$ με $x > 0$ τότε προκύπτει

$2x + \ln^2 x - 2\ln x - 2 \geq 0$ για $x > 0$

Β3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x - 6}\right) \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{6e^x + 3x^2 - 6x - 6} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{3(2e^x + x^2 - 2x - 2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{3f(x)} \overset{f(x)\geq 0}{=} +\infty$