Θέμα 07

Α. $f(x) = e^{-x} + 1 - e^{-1}, \quad x \in R$

Αφού $x \in (-\infty, +\infty)$ δεν θα έχω κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^{-x} + 1 - e^{-1}) = 0 + 1 - e^{-1} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{-x} + 1 - e^{-1}) = +\infty$ Άρα $y = \frac{e-1}{e}$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+1-e^{-1}}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty$ Άρα δεν έχει ούτε πλάγιες.

Β1. $f'(x) = -e^{-x} < 0 \Rightarrow f \searrow$

Β2. $f''(x) = e^{-x} > 0 \Rightarrow f \cup$

Β3. $f(R) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left(\frac{e-1}{e}, +\infty\right)$

Γ. $f \searrow$ τότε f 1-1 άρα αντιστρέφεται

$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 1 - e^{-1} = y \Leftrightarrow e^{-x} = y + e^{-1} - 1 \Leftrightarrow -x = \ln(y + e^{-1} - 1)$

$\Leftrightarrow x = -\ln(y + e^{-1} - 1)$ Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x + e^{-1} - 1)$

με $D_{f^{-1}} = f(R) = \left(\frac{e-1}{e}, +\infty\right)$

Δ1. $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow -\ln(x + e^{-1} - 1) = x \Leftrightarrow -\ln(x + e^{-1} - 1) - x = 0$

Θεωρώ $g(x) = -\ln(x + e^{-1} - 1) - x$ με $x \in D$

$g'(x) = -\frac{1}{x + e^{-1} - 1} - 1 < 0$ Άρα $g \searrow$ οπότε έχει μοναδική λύση την $x = 1$ Άρα $M(1,1)$

Δ2. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow -\ln(x + e^{-1} - 1) = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow -\ln(x + e^{-1} - 1) - \frac{1}{2}x = 0$

Θεωρώ $h(x) = -\ln(x + e^{-1} - 1) - \frac{1}{2}x$ με $x \in D$

$h'(x) = -\frac{1}{x + e^{-1} - 1} - \frac{1}{2} < 0$ Άρα $h \searrow$

- Η h συνεχής στο $[1,2]$ ως διαφορά συνεχών
- $\left.\begin{array}{l} h(1) = -\ln(e^{-1}) = 1 > 0 \\ h(2) = -\ln(2 + e^{-1} - 1) - 1 = -\ln(e^{-1} + 1) - 1 < 0 \end{array}\right\} h(1) \cdot h(2) < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον 1 $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

και επειδή $h \searrow$ το x_0 είναι μοναδικό