

# Θέμα 05

A.  $D_{\text{tos}} = \begin{cases} x \in D_s \\ s(x) \in D_t \end{cases} = \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases} = \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} =$   
 $= \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in (0,1) \end{cases} = (0,1) = D$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
1-x	+	+	-	-
x	-	+	+	+
ΓΙΝΟΜΤΟΣ	-	+	-	-

$h(x) = (\text{tos})(x) = t(s(x)) = t\left(\frac{x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \ln x - \ln(1-x)$

B1.  $h'(x) = (\ln x)' - (\ln(1-x))' = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} (1-x)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0 \Rightarrow h \uparrow$

Άρα  $h(D) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$ , αφού

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \ln(1-x)) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x - \ln(1-x)) = +\infty$

B2. Αφού  $h \uparrow$  τότε  $h$  1-1 οπότε αναστρέφεται

$h(x) = y \Leftrightarrow \ln x - \ln(1-x) = y \Leftrightarrow \ln \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \ln \frac{x}{1-x} = \ln e^y \Leftrightarrow$

$\frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - e^y \cdot x \Leftrightarrow x + e^y \cdot x = e^y \Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y$

$\Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y}$  Άρα  $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  με  $D_{h^{-1}} = h(D) = \mathbb{R}$

B3. Αφού  $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$  η  $h$  δεν έχει ολίγα ακρότατα και  $h^{-1}(\mathbb{R}) = (0,1)$

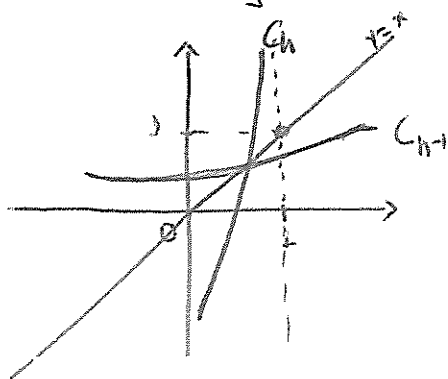
F1.  $h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0$  Θεωρούμε  $g(x) = h(x) - x$  με  $D_g = (0,1)$

$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1-x+x-x(1-x)}{x(1-x)} = \frac{1-x+x^2}{x(1-x)} > 0$  Άρα  $g \uparrow$

$x^2 - x + 1 > 0$   
 $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$   
 $\alpha = 1 > 0$

οπότε η  $g$  θα έχει μοναδική ρίζα την  $x_0 \in (0,1)$

$g(D) = (-\infty, +\infty)$  και το 0  $\in g(D)$



F2.