Θέμα 05

A. $D_{t\circ s} = \begin{cases} x \in D_s \\ s(x) \in D_t \end{cases} = \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases} = \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} =$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
Γινόμενο		$-$	0	$+$		$-$	

$= \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in (0,1) \end{cases} = (0,1) = D$

$h(x) = (t\circ s)(x) = t(s(x)) = t\left(\frac{x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \ln x - \ln(1-x)$

B1. $h'(x) = (\ln x)' - (\ln(1-x))' = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}(1-x)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0 \Rightarrow h \nearrow$

Άρα $h(D) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), \lim_{x\to 1^-} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$, αφού

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln(1-x)) = -\infty$

$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} (\ln x - \ln(1-x)) = +\infty$

B2. Αφού $h \nearrow$ τότε h 1-1 οπότε αντιστρέφεται

$h(x) = y \Leftrightarrow \ln x - \ln(1-x) = y \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x} = \ln e^y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - e^y \cdot x \Leftrightarrow x + e^y \cdot x = e^y \Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y$

$\Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y}$ Άρα $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ με $D_{h^{-1}} = h(D) = R$

B3. Αφού $D_{h^{-1}} = R$ η h δεν δέχεται ολικά ακρότατα

και $h^{-1}(R) = (0,1)$

Γ1. $h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0$ Θεωρώ $g(x) = h(x) - x$ με $D_g = (0,1)$

$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}-x(1-x)}{x(1-x)} = \frac{1-x+x^2}{x(1-x)} > 0$ Άρα $g \nearrow$

$x^2 - x + 1 > 0$
$\Delta = 1-4 = -3 < 0$
$\alpha = 1 > 0$

οπότε η g θα έχει μοναδική ρίζα την $x_0 \in (0,1)$

$g(D) = (-\infty, +\infty)$ και το $0 \in g(D)$

Γ2.