Θέμα 04

Α. Για $x<1$ f συνεχής ως πολυωνυμική

Για $x>1$ f συνεχής ως πολυωνυμική

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^6-6x) = 1-6=-5$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x^2+2x-6) = -1+2-6=-5$$

$$f(1)=-5$$

f συνεχής στο 1

Άρα f συνεχής σε όλο το R, δηλ f είναι μια συνεχής γραμμή

Β. Αρκεί να αποδείξω ότι f γνησίως φθίνουσα

Για $x<1$: $f'(x) = 6x^5-6$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^5-6=0 \Leftrightarrow x^5=1 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$	0	
f	$\searrow$		

Για $x>1$: $f'(x) = -2x+2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+2=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'		0	$-$
f			$\searrow$

Αφού f συνεχής έχουμε f $\searrow$

Γ. f συνεχής και $\searrow$ άρα $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$ αφού

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^6-6x) = \lim_{x\to-\infty} x^6 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x^2+2x-6) = \lim_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$$

Δ. κλίση είναι το $f'(x_0)$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^6-6x+5}{x-1} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{6x^5-6}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-x^2+2x-6+5}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-1}} = 0$$

$f'(1)=0$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^5-6, & x\le 1 \\ -2x+2, & x>1 \end{cases} \quad \text{Άρα} \quad f''(x) = \begin{cases} 30x^4, & x<1 \\ -2, & x>1 \end{cases}$$

δηλ για $x<1$ η f' $\nearrow$ και για $x>1$ η f' $\searrow$

Άρα για $x=1$ η f έχει τη μεγαλύτερη κλίση το $M(1,-5)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f'	$\nearrow$		$\searrow$

Ε. • Η f συνεχής στο $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

• Η f παραγωγίσιμη στο $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

Από ΘΜΤ υπάρχει ένα $\xi \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{3})}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 6\left(f(\tfrac{1}{2})-f(\tfrac{1}{3})\right)$$

$$\frac{1}{3}<\xi<\frac{1}{2} \overset{f'\nearrow}{\Longrightarrow} f'(\tfrac{1}{3})<f'(\xi)<f'(\tfrac{1}{2}) \Leftrightarrow -\frac{1452}{243} < 6f(\tfrac{1}{2})-6f(\tfrac{1}{3}) < -\frac{93}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{93}{16} < 6f(\tfrac{1}{3})-6f(\tfrac{1}{2}) < \frac{1452}{243}$$