Θέμα 03

Α. $f_1(x) = \ln x \quad , x>0$

$f_2(x) = 1-\ln x \quad , x>0$

$$D_{f_1 \circ f_2} = \begin{cases} x \in D_{f_2} \\ f_2(x) \in D_{f_1} \end{cases} = \begin{cases} x>0 \\ 1-\ln x>0 \end{cases} = \begin{cases} x>0 \\ \ln x<1 \end{cases} = \begin{cases} x>0 \\ \ln x<\ln e \end{cases} = \begin{cases} x>0 \\ x<e \end{cases} = (0,e)$$

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(1-\ln x) = \ln(1-\ln x)$$

Β1. $f'(x) = \dfrac{1}{1-\ln x} \cdot (1-\ln x)' = \dfrac{1}{1-\ln x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-1}{x(1-\ln x)} < 0 \Rightarrow f \searrow$

Β2. $f(1)=0$ και $f \searrow$ άρα $x=1$ μοναδική ρίζα

Για $0<x<1 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x)>0$

Για $1<x<e \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$

Β3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^x}{f(x)}\right)$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^x}{f(x)} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^x}{f(x)} = -\infty$

Άρα δεν υπάρχει το όριο

Γ. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(e^x-1)f(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{e^x-1} \cdot \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{f(x)} = \dfrac{1}{e-1} \cdot \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{f(x)} \overset{DLH}{=}$

$= \dfrac{1}{e-1} \cdot \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{e-1} \cdot \left(\dfrac{1}{-1}\right) = \dfrac{-1}{e-1} = \dfrac{1}{1-e}$

Δ1. $f^{-1}(x) = 3 \underset{1-1}{\overset{f \searrow}{\Leftrightarrow}} f(f^{-1}(x)) = f(3) \Leftrightarrow x = f(3)$ Αδύνατη γιατί 3 δεν ανήκει στο $D=(0,e)$

Δ2. $f^{-1}(x) = 3^{-1} \underset{1-1}{\overset{f \searrow}{\Leftrightarrow}} f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln(1-\ln 3^{-1})$

$\Leftrightarrow x = \ln(1+\ln 3)$