Διαγώνισμα

A

A1 Έστω $f(x)=y \longrightarrow f^{-1}(y)=x$

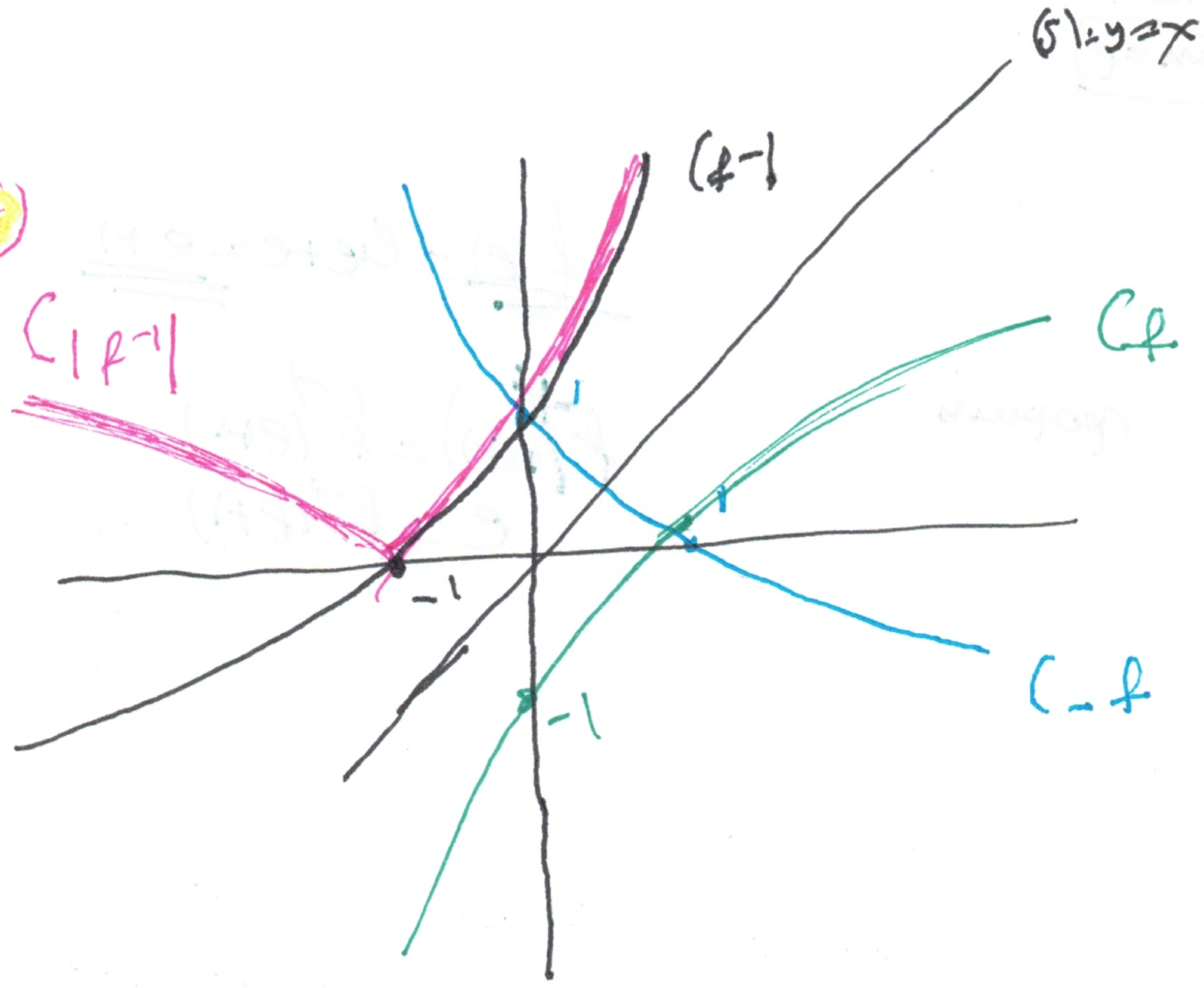
Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f τότε το $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντίστροφα

A2 Η f στο x_0 έχει ελάχιστο, αν $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in A$

A3
α – Σ
β – Σ
γ – Λ
δ – Σ

A4 $f^{-1}(x)=x^4-x^2+1 \longrightarrow$ $f^{-1}(-1)=1$, $f^{-1}(1)=1$ $\longrightarrow$ η f^{-1} δεν είναι 1-1

A5



B $h(x) = xe^x,\ x\in\mathbb{R}$

$g(x) = \ln x,\ x\in(0,+\infty)$

B1 $\boxed{f = g\circ h}$

$A_f = \{x\in A_h : h(x)\in A_g\} = (0,+\infty)$

Δηλαδή $x\in\mathbb{R}$ και $xe^x>0$ | $x>0$

$\boxed{f(x)} = g(h(x)) = \ln(xe^x) = \ln x + \ln e^x = \boxed{\ln x + x}$, $x>0$

B2 Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2 \to \ln x_1 < \ln x_2$ (+) $\to \ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2$

$f(x_1)<f(x_2)$

$\boxed{f \uparrow}$

B3 $\ln\left(\frac{m}{e}\right) = e - m \Leftrightarrow \ln m - \ln e = e - m$

$m>0$

$\ln m + m = \ln e + e$

$f(m) = f(e)$

$\boxed{m=e}$

B4 $f^{-1}(e+1) + f(f^{-1}(1)) = f(e)$

$\Leftrightarrow\ e + 1 = e+1$ ισχύει

$f(e) = \ln e + e = e+1$

$f^{-1}(f(e)) = f^{-1}(e+1)$

$e = f^{-1}(e+1)$

Γ

$\boxed{f(x)=\frac{e^x-\lambda}{e^x+1}}$

περιττή

$f(-x)=-f(x) \xrightarrow{x=0} f(0)=-f(0) \to 2f(0)=0$

$f(0)=0$

$\frac{e^0-\lambda}{e^0+1}=0 \to \boxed{\lambda=1}$

$\boxed{f(x)}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{2}{e^x+1}=\boxed{1-\frac{2}{e^x+1}}$

Γ1

Γ2 $x_1<x_2 \to e^{x_1}<e^{x_2} \to e^{x_1}+1<e^{x_2}+1 \to \frac{1}{e^{x_1}+1}>\frac{1}{e^{x_2}+1}$

$\frac{-2}{e^{x_1}+1}<\frac{-2}{e^{x_2}+1}$

$f(x_1)<f(x_2) \to$ f: ↑

Γ3 Αφού η f ↑ → f: 1-1 → $\exists f^{-1}$

$f(x)=y \Leftrightarrow 1-\frac{2}{e^x+1}=y \Leftrightarrow \frac{2}{e^x+1}=1-y \to 2=e^x+1-ye^x-y$

$\frac{2}{e^x+1}$ ⊕, $1-y>0$, $y<1$

$(1-y)e^x=1+y$

$e^x=\frac{1+y}{1-y}$

$x=\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right),\ -1<y<1$

Επειδή $e^x>0 \to \frac{1+y}{1-y}>0 \to (y+1)(y-1)<0$

$-1<y<1$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ / $(-1,1)$

Γ4 $(\sqrt{e}+1)(e^{f(x)}-1)=(\sqrt{e}-1)(e^{f(x)}+1)$

$\Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}-1}{e^{f(x)}+1}=\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}+1} \Leftrightarrow f(f(x))=f\left(\frac{1}{2}\right)$

f: 1-1

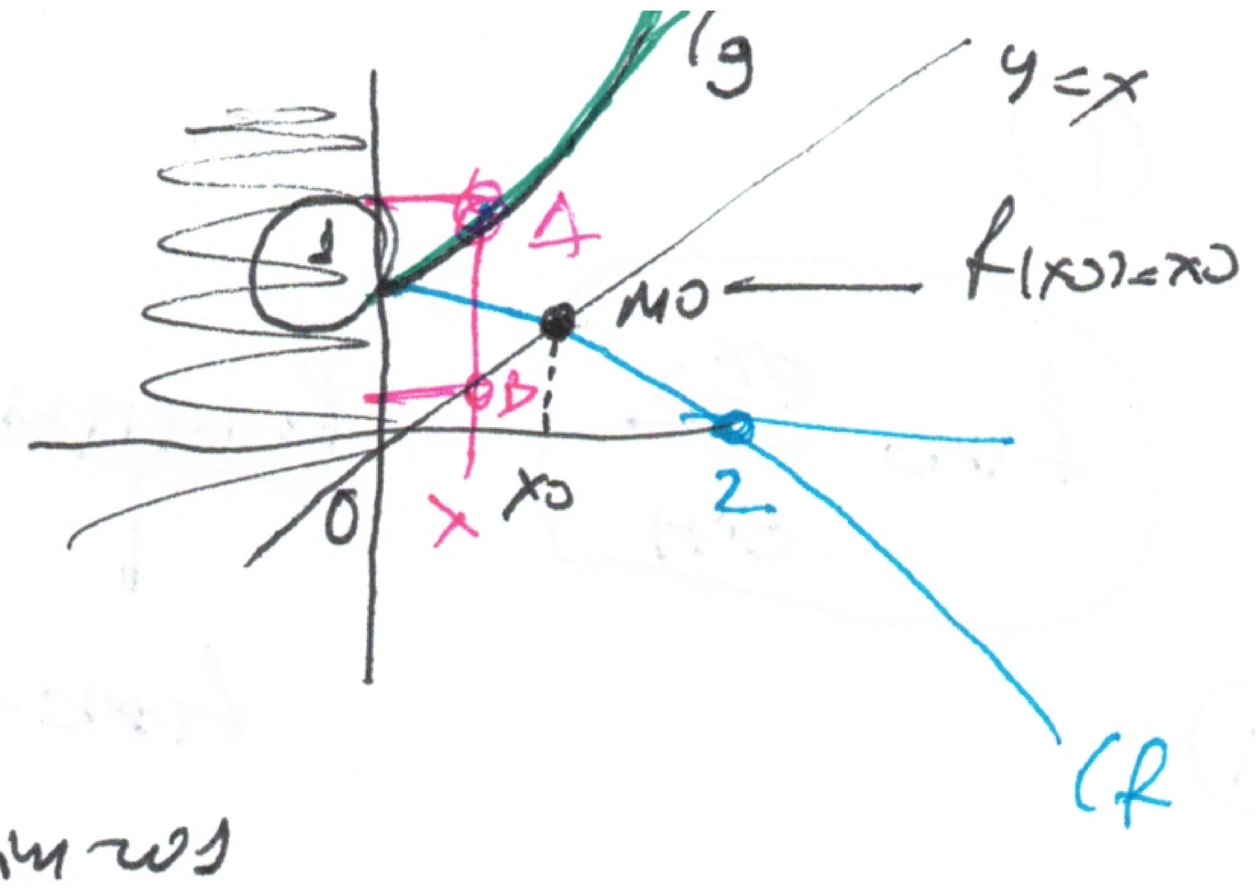
$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{\frac{1}{2}}-1}{e^{\frac{1}{2}}+1}=\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}+1}$

$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x-2=e^x+1$

$e^x=3 \to \boxed{x=\ln 3}$

Δ1 $g(x) = e^x + x, \quad x \in [0, +\infty)$



Δ1 $x_1 < x_2 \to e^{x_1} < e^{x_2}$ (+) $\to e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2$

$g(x_1) < g(x_2)$

g: ↑

$x \geq 0 \to g(x) \geq g(0) = 1$

Άρα η g στο 0 έχει min το 1

Δ2

f: ↓ $\mathbb{R}_+$

$f(0) = 1$

$f(2) = 0$

$x \geq 0 \to f(x) \leq f(0) = 1$

Άρα η f στο 0 έχει max το 1

Δ3 $x \geq 0$: $e^{f(x)} - g(x) = e^{g(x)} - f(x)$

$e^{f(x)} + f(x) = e^{g(x)} + g(x)$

$g(f(x)) = g(g(x)) \to f(x) = g(x)$ (≤ 1, ≥ 1)

$f(x) = 1$ και $g(x) = 1$ | $x = 0$ και $x = 0$ | $\boxed{x = 0}$

Δ4 $g(x) \geq f(x)$

$AB = |g(x) - f(x)| = g(x) - f(x) = h(x) = e^x + x - f(x)$

$x \geq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$ με $x_1 < x_2 \to g(x_1) < g(x_2)$

$f(x_1) > f(x_2) \to -f(x_1) < -f(x_2)$ (+)

$g(x_1) - f(x_1) < g(x_2) - f(x_2)$

$h(x_1) < h(x_2)$

h: 1-1

$AB = e^2 + 2 \to h(x) = e^2 + 2 = h(2)$

$\boxed{x = 2} \to A(2, e^2 + 2)$, $B(2, 0)$

$h(2) = e^2 + 2 - \cancel{f(2)}$

Δ5 $t(x) = 1 - f^2(x) + 2x f(x) - x^2$

$= 1 - (f(x) - x)^2 \leq 1$

$t(x) \leq t(x_0) \leq 1$

$t(x_0) = 1 - \cancel{(f(x_0) - x_0)} = 1$

Άρα η t παρουσιάζει μέγιστο το 1