1.4. **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=2e^x+x$ **,** $x\in R$

Να αναλύσετε αυτή ως άθροισμα δύο συναρτήσεων μίας άρτιας και μίας περιττής .

Απάντηση

Θέλουμε συναρτήσεις f_1 : άρτια

και f_2 : περιττή, ώστε $f_1(x)+f_2(x)=2e^x+x$, $x\in R$

Τότε $f_1(-x)+f_2(-x)=2e^{-x}-x \Leftrightarrow f_1(x)-f_2(x)=2e^{-x}-x$, $x\in R$

Προσθέτοντας έχουμε $2f_1(x)=e^x+e^{-2} \Leftrightarrow f_1(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$

Αφαιρώντας, έχουμε $2f_2(x)=2x$ και $f_2(x)=x$

1.5. **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=x+\ln x$ **,** $x>0$

Να γράψετε τη συνάρτηση f **ως σύνθεση δύο συναρτήσεων.**

Απάντηση

$f(x)=x+\ln x=\ln e^x+\ln x=\ln\left(xe^x\right)$**,** $x>0$

Η f είναι η σύνθεση της συνάρτησης $f_1(x)=xe^x$, $x\in R$ με την $f_2(x)=\ln x$, $x>0$

1.6. **Αν για τις ορισμένες στο** R **συναρτήσεις** $f(x)=ax^2+bx+c$ **και** $g(x)=-x$

με $a,b,c\in R$ **είναι** $(f\circ g)(x)=2(g\circ f)(x)$**, να αποδείξετε ότι** $f(x)=0$

Απάντηση

$$(f\circ g)(x)=2(g\circ f)(x) \Leftrightarrow f(g(x))=2g(f(x))$$

$$\Leftrightarrow ag^2(x)+bg(x)+c=-2f(x)$$

$$\Leftrightarrow ag^2(x)+bg(x)+c=-2\left(ax^2+bx+c\right)$$

$$\Leftrightarrow ax^2-bx+c=-2ax^2-2bx-2c$$

$$\Leftrightarrow 3ax^2+bx+3c=0,\ \text{για κάθε } x\in R$$

Οπότε, πρέπει $a=b=c=0$ και συνεπώς $f(x)=0$

1.10. **Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση $f(x)=2x^4-8x^3+18x^2-20x+12$, $x\in R$**
Να αποδείξετε πρώτα ότι το τριώνυμο x^2-2x+2 διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$
και μετά να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το 4

Απάντηση

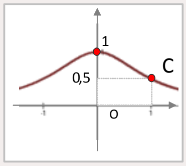
$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & -8x^3 & +18x^2 & -20x & +12 & x^2-2x+2 \\ \cline{6-6} -2x^4 & +4x^3 & -4x^2 & & & 2x^2-4x+6 \\ 0 & -4x^3 & +14x^2 & -20x & +12 & \\ & +4x^3 & -8x^2 & +8x & & \\ & 0 & +6x^2 & -12x & +12 & \\ & & -6x^2 & +12x & -12 & \\ & & & 0 & & \end{array}$$

Οπότε $f(x)=2x^4-8x^3+18x^2-20x+12=2\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2-2x+3\right)$

Επειδή $x^2-2x+2\geq 1$ και $x^2-2x+3\geq 2$,είναι $f(x)\geq 4=f(1)$

Άρα, η f στο 1 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1)=4$

1.11. **Έστω η συνάρτηση f**
με γραφική παράσταση C που φαίνεται δίπλα.



Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=2f(x-1)-1$ έχει μέγιστο.

Απάντηση

$f(x-1)\leq 1$ και $2f(x-1)\leq 2 \quad\Leftrightarrow\quad F(x)=2f(x-1)-1\leq 1=F(1)$

Οπότε, η συνάρτηση F στο 1 παρουσιάζει μέγιστο το 1

1.12. **Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$**
Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon):y=1$
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=f^2(x)-2f(x)+2$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Απάντηση

Αφού η C_f τέμνει την ευθεία $y=1$ έστω στο σημείο $M(x_o,1)$, είναι $f(x_o)=1$

$F(x)=f^2(x)-2f(x)+2=\left(f(x)-1\right)^2+1\geq 1=F(x_o)$

Δηλαδή, η συνάρτηση F παρουσιάζει ελάχιστο το 1

1.18. **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=1-2e^{\alpha x}$ **,** $x\in R$

και αντίστροφη συνάρτηση την $f^{-1}(x)=\ln(1-x)-\beta\ln 2$ **,** $x<1$

Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$ **και να λύσετε την εξίσωση** $f(x)+f^{-1}(x)+\ln 2+1=0$

Απάντηση

$f(x)=y \Leftrightarrow 1-2e^{\alpha x}=y \Leftrightarrow 2e^{\alpha x}=1-y\,, y<1 \Leftrightarrow \ln\left(2e^{\alpha x}\right)=\ln(1-y)$

$\Leftrightarrow \ln 2+\ln e^{\alpha x}=\ln(1-y)$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}\ln(1-y)-\frac{1}{\alpha}\ln 2$

με $\alpha\neq 0$

Αν ήταν $\alpha=0$, τότε θα ήταν $f(x)=-1$ Άτοπο, αφού αυτή δεν αντιστρέφεται.

Οπότε $f^{-1}(x)=\frac{1}{\alpha}\ln(1-x)-\frac{1}{\alpha}\ln 2$ και πρέπει $\frac{1}{\alpha}\ln(1-x)-\frac{1}{\alpha}\ln 2=\ln(1-x)-\beta\ln 2$

Για $x=0$ είναι $\frac{1}{\alpha}=\beta$ και η σχέση $\beta\ln(1-x)-\beta\ln 2=\ln(1-x)-\beta\ln 2$

γίνεται $\beta\ln(1-x)=\ln(1-x)$

Για $x=-2$ πρέπει $\beta\ln 2=\ln 2 \Leftrightarrow \beta=1$ και άρα $\alpha=1$

Η συνάρτηση $h(x)=f(x)+f^{-1}(x)+\ln 2+1=1-2e^{x}+\ln(1-x)-\ln 2+\ln 2+1$

$=2-2e^{x}+\ln(1-x)$ είναι προφανώς γνησίως αύξουσα.

Έτσι $f(x)+f^{-1}(x)+\ln 2+1=0 \Leftrightarrow h(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=h(0) \Leftrightarrow x=0$

1.19. **Έστω η** $1-1$ **συνάρτηση** $f(x)=x^{n}-2nx$ **,** $n\in N$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=-x$ **,** $x\in R$

Απάντηση

Αν $n=0$ τότε $f(x)=1$ Άτοπο, αφού η f δεν είναι $1-1$

Αν $n=1$ τότε $f(x)=-x$

Αν $n>1$ τότε $f(x)=x^{n}-2nx=x(x^{n-1}-2n)$

η οποία έχει διαφορετικές ρίζες τους αριθμούς 0

και την $x=\sqrt[n-1]{2n}$, αν n: άρτιος Άτοπο

και τις $x_1=-\sqrt[n-1]{2n}$ και $x_2=+\sqrt[n-1]{2n}$, αν n: περιττός Άτοπο

Οπότε $f(x)=-x$, $x\in R$