## Απαντήσεις

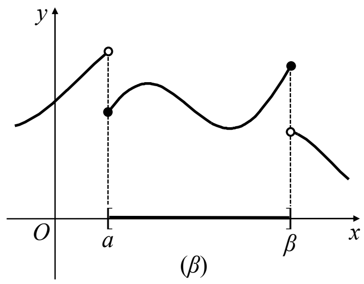
### ΘΕΜΑ **Α**

**Α1.** Θεωρία(Σελ. 112 σχολικού βιβλίου)

**Α2.** Θεωρία(Σελ. 25 σχολικού βιβλίου)

**Α3.** Θεωρία(Ορισμός-Σελ. 73 σχολικού βιβλίου)

Δεν είναι απαραίτητο για να είναι η f συνεχής στο [α, β] να είναι η f συνεχής στο α και στο β.




Για να είναι η f συνεχής στο [α, β] θα πρέπει η f να είναι συνεχής στο (α, β) και επιπλέον να ισχύει ότι.

$\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

**Α4.** **α-Λ** **β-Λ** **Γ-Σ** **δ-Σ** **ε-Λ**

**<u>ΘΕΜΑ</u> Β**

**Β1.** Αφού η f είναι συνεχής στο R θα είναι και συνεχής στο 0, οπότε θα ισχύει ότι

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \Leftrightarrow e^0+(m-1)\cdot 0^e=0^3-2\cdot 0^2+0+m \Leftrightarrow m=1$, οπότε

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{αν} \quad x>0 \\ x^3-2x^2+x+1 & \text{αν} \quad x\le 0 \end{cases}$$

**Β2.** α)Για x<0 ισχύει ότι $f'(x)=(e^x)'=e^x$, ενώ για x>0, ισχύει ότι $f'(x)=(x^3-2x^2+x+1)'=3x^2-4x+1$.

Επειδή $\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)=0$ και $\lim_{x\to 0^+} x=0$ θα ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(x\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1}=e^0=1$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^-}(x^3-2x^2+x+1)=1$ και $\lim_{x\to 0^-} x=0$ θα ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-2x^2+x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-2x^2+x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(x^3-2x^2+x\right)'}{\left(x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3x^2-4x+1}{1}=1$$

Πήραμε κανόνα De L' Hospital αφού $\lim_{x\to 0^-}(x^3-2x^2+x)=0$ και $\lim_{x\to 0^-} x=0$.

Επειδή $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ θα ισχύει ότι f'(0)=1.

Άρα $f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{αν} \quad x>0 \\ 3x^2-4x+1 & \text{αν} \quad x\le 0 \end{cases}$

β) Για x>0 ισχύει ότι $f'(x)=e^x>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∞).

Για x<0 έχουμε ότι $f'(x)=3x^2-4x+1$. Έχουμε ότι $\Delta=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 1=16-12=4$, οπότε έχουμε για το τριώνυμο δύο ρίζες τις $x_1=\frac{1}{3}$ και $x_2=1$. Επειδή x<0 ισχύει ότι $3x^2-4x+1>0$ δηλαδή ότι f'(x)>0, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (-∞, 0]. Επομένως η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ)Επειδή f γνησίως αύξουσα στο R θα ισχύει ότι $f(R)=\left(\lim_{x\to -\infty}f(x), \lim_{x\to +\infty}f(x)\right)$

Επειδή $\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(x^3-2x^2+x+1\right)=\lim_{x\to -\infty}x^3=-\infty$

και $\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x^3-2x^2+x+1\right)=\lim_{x\to +\infty}x^3=+\infty$, θα ισχύει ότι f(R)=(-∞, +∞)=R

**Β3.** Επειδή g'(x)>0 για κάθε x∈(-∞, 0) και g'(x)<0 για κάθε x∈(0, +∞) και η g είναι συνεχής στο R αφού παραγωγίζεται στο R, θα ισχύει ότι, η g είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞, 0] και γνησίως φθίνουσα στο [0, +∞).Επομένως η g θα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 το g(0)=0.

Επειδή η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο R η g είναι κοίλη στο R.

**Β4.**Έχουμε ότι f(0)=1 οπότε η εξίσωση f(g(x))=1 γίνεται f(g(x))=f(0) και επειδή η f είναι 1-1 αφού είναι γνησίως αύξουσα θα ισχύει ότι g(x)=0, οπότε x=0, αφού γνωρίζουμε ότι g(0)=0 και για x<0, επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞, 0] θα ισχύει ότι g(x)<g(0), δηλαδή g(x)<0, ενώ για x>0, επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, +∞) θα ισχύει ότι g(x)< g(0), δηλαδή g(x)<0.

**Β5.**Έχουμε ότι η g και η f είναι συνεχείς συναρτήσεις στο R. Οπότε για το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(f\left(g(x)\right)-1\right)$ ακολουθούμε την εξής διαδικασία

Θέτω g(x)=u , οπότε $\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$ .Έτσι θα έχουμε ότι

$\lim\limits_{x\to 0}\left(f\left(g(x)\right)-1\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(f\left(u\right)-1\right)=f(0)-1=1-1=0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ με δεδομένο ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R και οι συναρτήσεις f' και g' είναι συνεχείς στο R θα ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(g(x)\right)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(f\left(g(x)\right)-1\right)'}{\left(x\right)'}=\lim_{x\to 0}\left(f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\right)=f'(g(0))\cdot g'(0)=f'(0)\cdot 0=1\cdot 0=0$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**

Θέτουμε $\frac{f'(x)}{ημx}=g(x)$ κοντά στο 0, οπότε $f'(x)=g(x)\cdot ημx$ και επομένως

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}ημx\cdot g(x)=0$, επειδή $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}ημx=0$

Επειδή η f' είναι συνεχής αφού η f παραγωγίζεται δύο φορές

θα ισχύει ότι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)ημx-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{ημx}{x}\right)=0\cdot 1=0$. Επομένως $f''(0)=0$.

**Γ2.**

Επειδή $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}\right)=24x$ για κάθε $x\in R$ θα ισχύει ότι $f'''(x)=24x$ για κάθε $x\in R$.

Έτσι θα έχουμε $f''(x)=12x^2+c$ (1), για κάθε $x\in R$. Επειδή $f''(0)=12\cdot 0^2+c$ και $f''(0)=0$, θα έχουμε ότι c=0 και

επομένως θα ισχύει $f''(x)=12x^2$, για κάθε $x\in R$, οπότε $f'(x)=4x^3+c_1$, για κάθε $x\in R$, και επειδή $f'(0)=0$, θα

ισχύει ότι $f'(x)=4x^3$, για κάθε $x\in R$. Έτσι τελικά θα έχουμε ότι $f(x)=x^4+c_2$, για κάθε $x\in R$.

Επειδή ισχύει $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{5}$ θα έχουμε $\int_0^1\left(x^4+c_2\right)dx=\frac{1}{5}$, δηλαδή $\int_0^1 x^4dx+\int_0^1 c_2dx=\frac{1}{5}$, οπότε

$$\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1+c_2=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{5}-0+c_2=\frac{1}{5}\Leftrightarrow c_2=0$$

Άρα $f(x)=x^4$, για κάθε $x\in R$.

**Γ3.**

Έχουμε ότι A(0, -4), B(1, 0) και M(x, f(x)).

Για να δείξουμε ότι τα σημεία A, B και M σχηματίζουνε τρίγωνο αρκεί να δείξουμε ότι $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})\neq 0$

Έχουμε ότι $\overrightarrow{AM}=(x,f(x)+4)=(x,x^4-(-4))=(x,x^4-(-4))$ και $\overrightarrow{AB}=(1,0-(-4))=(1,4)$, οπότε

$$\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix}x & x^4+4\\ 1 & 4\end{vmatrix}=x\cdot 4-1\cdot(x^4+4)=-x^4+4x-4$$

Θέτουμε $g(x)=x^4-4x+4$ για κάθε $x\in R$.

Τότε $g'(x)=4x^3-4$.

$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow 4x^3-4\geq 0\Leftrightarrow 4x^3\geq 4\Leftrightarrow x^3\geq 1\Leftrightarrow x^3\geq 1^3\Leftrightarrow x\geq 1$

αφού η συνάρτηση $h(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Επομένως

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g΄(x) | | + | 0 | – | |
| g(x) | $-\infty$ | ↗ | - 1<br>max | ↘ | $+\infty$ |

Άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1, το g(1)=-1, οπότε g(x)≤g(1)=-1<0

Επειδή g(x)<0 για κάθε x∈R η ορίζουσα $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})\neq 0$ και επομένως τα σημεία Α, Β και Μ είναι μη συνευθειακά και σχηματίζουνε τρίγωνο.

Τώρα το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι

$$(AMB)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})\right|=\frac{1}{2}|-x^4+4x-4|=\frac{1}{2}\left(-(-x^4+4x-4)\right),\ \text{αφού}\ -x^4+4x-4<0,$$

οπότε $(AMB)=\frac{1}{2}(x^4-4x+4)$.

**Γ4.** Αφού $E=\frac{1}{2}$ θα ισχύει ότι $\frac{1}{2}(x^4-4x+4)=\frac{1}{2}$, οπότε θα έχουμε ότι

$x^4$-4x+4=1□ $x^4$-4x+3=0 που γίνεται $x^4$-x-3x+3=0□x($x^3$-1)-3(x-1)=0□

x(x-1)($x^2$+x+1)-3(x-1)=0□(x-1)($x^3$+$x^2$+x-3)=0□(x-1)($x^3$-1+$x^2$-1+x-1)=0□

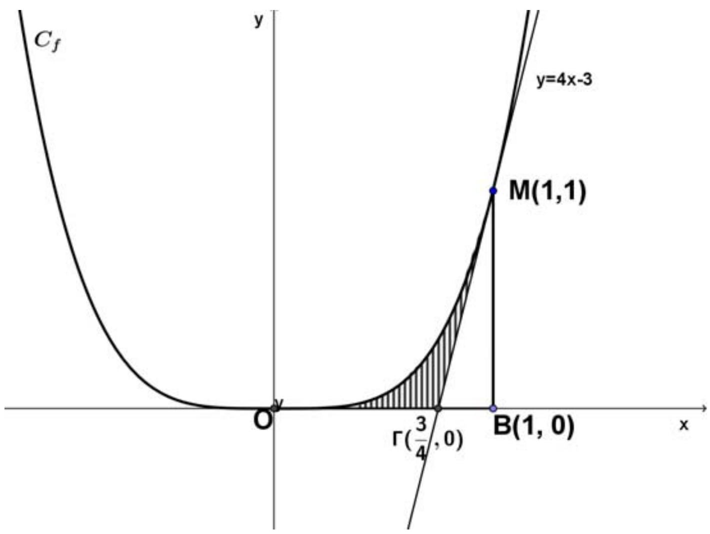
(x-1)[ (x-1)($x^2$+x+1)+(x-1)(x+1)+(x-1)]=0□(x-1)(x-1)($x^2$+x+1+x+1+1)=0□

$(x-1)^2$($x^2$+2x+3)=0□x-1=0 ή $x^2$+2x+3=0 που είναι αδύνατη.

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται και με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

Άρα x=1, οπότε Μ(1, $1^4$), δηλαδή Μ(1, 1).

Η εφαπτομένη της $C_f$ στο Μ(1, 1) είναι η y-f(1)=f'(1)(x-1), δηλαδή η y-1=4(x-1) που τελικά γίνεται y=4x-3.




Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος έχουμε για το εμβαδόν Ε(Ω) του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και την εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο Μ.

$E(\Omega)=\int_0^1|f(x)|dx-(\Gamma BM)$ και επειδή f(x)≥0 για κάθε x∈R θα ισχύει ότι:

$$E(\Omega)=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2}(\Gamma B)\cdot(BM)=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot 1=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}-\frac{1}{8}=\frac{3}{40}\ \text{τ.μ.}$$

## ΘΕΜΑ **Δ**

**Δ1.** Για να αποδείξουμε το ζητούμενο θέτουμε 1-x=u και επομένως x=1-u.
Για x=0, έχουμε u=1 και για x=1, έχουμε u=0. Επίσης (1-x)'dx=du, δηλαδή –dx=du, οπότε ισχύει

$$\int_0^1 f(1-x)dx = -\int_1^0 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx$$

**Δ2.** Για κάθε x>0, ισχύει ότι $g'(x) = \left(x\ln x - (x+1)\ln(x+1)\right)' = \ln x + 1 - \ln(x+1) - 1 = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$

αφού $0 < \frac{x}{x+1} < 1$ και άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

**Δ3.** Είναι $f'(x) = \left(x(1-x)^{2n}\right)' = (x)'\left(1-x\right)^{2n} + x\left(\left(1-x\right)^{2n}\right)'$

$$= \left(1-x\right)^{2n} + 2nx\left(1-x\right)^{2n-1}(1-x)'$$
$$= \left(x-1\right)^{2n} + 2nx\left(x-1\right)^{2n-1}$$
$$= \left(x-1\right)^{2n-1}\left(x-1+2nx\right)$$
$$= \left(x-1\right)^{2n-1}\left((2n+1)x-1\right)$$

| x | −∞ 1/2n+1 1 | | |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | **0** − **0** | + |
| f | ↗ | ↘ | ↗ |

Να σημειώσουμε ότι ο $2n-1$ είναι περιττός και ο $2n$ είναι άρτιος.

Είναι προφανές ότι $\frac{1}{2n+1} < 1 \Leftrightarrow 1 < 2n+1 \Leftrightarrow 2n > 0 \Leftrightarrow n > 0$ Προφανές

Η f παρουσιάζει και ένα τοπικό ελάχιστο, το $f(1) = 0$ και ένα τοπικό μέγιστο

το $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n} = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}$

$$= e^{\ln\left(\frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}\right)} = e^{\ln(2n)^{2n} - \ln(2n+1)^{(2n+1)}} = e^{2n\ln(2n) - (2n+1)\ln(2n+1)} = e^{g(2n)}$$

**Δ4.** Έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2n+1}\right]$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot\left(1-x\right)^{2n}\right) = -\infty$. Άρα θα ισχύει ότι $f\left(\left(-\infty, \frac{1}{2n+1}\right]\right) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right] = \left(-\infty, \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}\right]$ που περιέχει το -2018 και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{2n+1}\right]$ η εξίσωση f(x)=-2018, θα έχει σ' αυτό μοναδική ρίζα.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2n+1}, 1\right]$ θα ισχύει ότι

$f\left(\left[\frac{1}{2n+1},1\right]\right)=\left[f(1),f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\left[0,\frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}\right]$ που δεν περιέχει το -2018 και επομένως η εξίσωση

f(x)=-2018, στο διάστημα $\left[\frac{1}{2n+1},1\right]$ δεν έχει ρίζα.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1, +∞) , οπότε θα ισχύει ότι $f\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[0,+\infty\right)$

που δεν περιέχει το -2018 και επομένως η εξίσωση f(x)=-2018, στο διάστημα[1, +∞) δεν έχει ρίζα.
Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση f(x)=-2018, θα έχει μοναδική ρίζα η οποία θα βρίσκεται στο διάστημα $\left(-\infty,\ \frac{1}{2n+1}\right]$

**Δ5.**

α)Έχουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατα το f(1)=0 και το $f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=e^{g(2n)}$ Θέλουμε να έχουμε ακρότατο ίσο με $\frac{4^4}{5^5}$, οπότε θα ισχύει $f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{4^4}{5^5}$, δηλαδή $e^{g(2n)}=\frac{4^4}{5^5}$ που ισοδύναμα γίνεται $e^{g(2n)}=e^{\ln\frac{4^4}{5^5}}$. Επειδή $g(4)=4\ln4-5\ln5=\ln4^4-\ln5^5=\ln\frac{4^4}{5^5}$, θα έχουμε ότι $e^{g(2n)}=e^{g(4)}$, δηλαδή g(2n)=g(4)και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει ότι 2n=4, οπότε n=2.

β)Στο Δ1. ερώτημα αποδείξαμε ότι $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(1-x)\,dx$ . Επομένως θα ισχύει ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{30}\Leftrightarrow\int_0^1 f(1-x)\,dx=\frac{1}{30}\Leftrightarrow\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx=\frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left(x^{2n}-x^{2n+1}\right)dx=\frac{1}{30}\Leftrightarrow\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1=\frac{1}{30}\Leftrightarrow\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{30}\Leftrightarrow$$

$$4n^2+6n-28=0\Leftrightarrow n=2$$