ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΥΡΙΑΚΗ 22 ΜΑΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: Τέσσερις (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o

να αποδείξετε ότι η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o, με $\left(f+g\right)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$

Μονάδες 7

Α2. Έστω f,g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντιστοίχως.
Να ορίσετε τη σύνθεση της f με την g.

Μονάδες 4

Α3. Έστω η συνάρτηση $f:R\rightarrow R$.
Για να είναι η f συνεχής στο [α, β], θα πρέπει η f να είναι συνεχής στο α και στο β;
Απαντήστε με ένα ΝΑΙ ή ένα ΟΧΙ
Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι **Σ**ωστή, ή **Λ**άθος, αν η πρόταση είναι Λανθασμένη.

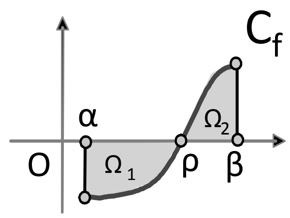
α) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot f(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

β) Κάθε συνεχής συνάρτηση στο ανοιχτό διάστημα (α,β) συνάρτηση δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα.

γ) Αν η ορισμένη και παραγωγίσιμη $f:[\alpha,\beta]\rightarrow R$ δεν έχει κρίσιμα σημεία τότε αυτή παρουσιάζει ακρότατα μόνο στα α και β.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right)=L$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=L$

ε) Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.
με $E\left(\Omega_1\right)=E_1$ τ.μ. και $E\left(\Omega_2\right)=E_2$ τ.μ.
Είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\rho f(x)dx+\int_\rho^\beta f(x)dx=E_1+E_2$



Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x+(m-1)x^e & \text{αν} \quad x>0 \\ x^3-2x^2+x+m & \text{αν} \quad x\le 0 \end{cases}$

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{αν} \quad x>0 \\ x^3-2x^2+x+1 & \text{αν} \quad x\le 0 \end{cases}$

Μονάδες 3

Β2. **α)** Να βρείτε τη παράγωγο συνάρτηση f'

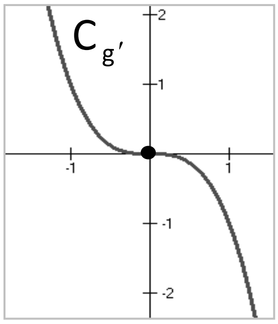
Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

γ) Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$

Μονάδες 3



Έστω και η συνάρτηση $g:R\to R$, με $g(0)=0$

της οποίας η γραφική παράταση της παραγώγου g' δίνεται δίπλα.

Β3. Να μελετήσετε την g ως προς τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $f\big(g(x)\big)=1$

Μονάδες 4

Β5. Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f\big(g(x)\big)-1}{x}\right)$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει ότι

- $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{5}$ **(1)**
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)}{\eta\mu x}\right)=0$ **(2)**
- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}\right)=24x,\ x\in R$ **(3)**

και τα σημεία $A(0,-4)$, $B(1,0)$, $M(x,f(x))$ με $x\in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$, $f''(0)=0$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^4$, $x\in R$

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Μ είναι κορυφές τριγώνου του οποίου το εμβαδόν του ισούται με $E=0,5\left(x^4-4x+4\right)$ τ.μ.

Μονάδες 7

Γ4. Αν $E=\dfrac{1}{2}$ τ.μ., να αποδείξετε ότι $M\left(1,1\right)$ και να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της Μ

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x(1-x)^{2n}$, $x\in R$ και $n=1,2,3,...$ φυσικός αριθμός και η συνάρτηση $g(x)=x\ln x-(x+1)\ln(x+1)$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(x)\,dx$

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 3

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει στο 1 τοπικό ελάχιστο το 0 και στο $\dfrac{1}{2n+1}$ μέγιστο το $e^{g(2n)}$ τα οποία είναι μοναδικά.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=-2018$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι η τιμή του μη μηδενικού ακροτάτου της f ισούται με $\dfrac{4^4}{5^5}$ αν και μόνο αν $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{1}{30}$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο **εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα.

Στο εσώφυλλο πάνω - πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή.

Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω - πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

5. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.0 0 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ